

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

*Versuch 15*  
**Dia- und Paramagnetismus**

---

Praktikant:           Leif Posner  
Betreuer:  
Durchgeführt am: 13.06.2024  
Abgabedatum:       27.06.2024

Testat:

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>1. Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. Theorie</b> . . . . .	<b>1</b>
2.1. Diamagnetismus . . . . .	2
2.2. Paramagnetismus . . . . .	2
2.3. Energie des Magnetfeldes und Kraft auf Probekörper . . . . .	3
<b>3. Durchführung</b> . . . . .	<b>3</b>
3.1. Versuchsaufbau . . . . .	3
3.2. Hall-Sonde . . . . .	5
3.3. Versuchsdurchführung . . . . .	6
<b>4. Auswertung</b> . . . . .	<b>6</b>
4.1. Ortsverlauf der magnetischen Flussdichte $B(h)$ . . . . .	7
4.2. Kraft $F_h$ auf Probekörper bei $I_{sp} = 1,2\text{ A}$ . . . . .	9
4.3. (Spezifische) magnetische Suszeptibilität . . . . .	10
4.4. $\vec{B}$ -Feld bei verschiedenen Spulenströmen $I_{sp}$ . . . . .	11
4.5. Kraft $F_h$ auf Mangan-Probekörper bei verändertem Spulenstrom $I_{sp}$ . . . . .	14
<b>5. Diskussion</b> . . . . .	<b>16</b>
5.1. Ausmessung des $\vec{B}$ -Feldes . . . . .	16
5.2. Probekörper im $\vec{B}$ -Feld . . . . .	18
5.3. Kraft $F_h$ auf Probekörper . . . . .	19
<b>A. Anhang</b> . . . . .	<b>I</b>
<b>Literatur</b> . . . . .	<b>V</b>

## 1. Einleitung

In fast jeder Küche obligatorisch: Der Magnet an der Tür zum Kühlschrank. Das der Magnet selbst ein Magnetfeld erzeugt und die Kühlschranktür nur dann eine magnetische Wirkung ausübt, wenn man einen Magneten daran anbringt, ist so normal, dass man es beinahe nicht mehr hinterfragt. Dieses Phänomen ist aber ziemlich erstaunlich.

Hält man den Kühlschrankmagneten zum Beispiel in die Nähe einer Büroklammer, so magnetisiert sich diese und wird angezogen. Dieses Phänomen nennen wir *Paramagnetismus*. Im Gegensatz dazu besteht der Magnet selbst aus einem *ferromagnetischen* Material, das schon ohne externes Feld ein Magnetfeld aufweist. Diese Klasse wird daher auch *Ferromagnetismus* genannt. Weit unbekannter und seltener ist die dritte Klasse der *Diamagneten*. Deren Verhalten entzieht sich unserer Alltagserfahrung: Bringt man einen solchen Magneten in ein Magnetfeld, so wird dieser abgestoßen und nicht wie ein Paramagnet angezogen.

In folgendem Versuch wollen wir dieses diametrale Verhalten von Para- und Diamagneten näher untersuchen.

## 2. Theorie

Nach der vierten MAXWELL Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \iff \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (2.1)$$

werden  $\vec{B}$ -Felder durch elektrische *Kreisströme*  $\vec{j}$  erzeugt [1, 2, S. 136, S. 374].  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$  ist die (*Vakuums*)-*Permeabilität* [1, Anhang]. Wir unterscheiden zwischen *freien* Strömen aus nicht gebundenen Ladungsträgern (z.B. Spulen), deren Feld wir als *magnetische Erregung*  $\vec{H}$  bezeichnen, und *gebundenen* Strömen. Letztere sind Ströme, die in Materie eine Magnetisierung  $\vec{M}$  hervorrufen. Mikroskopisch werden dabei magnetische Momente  $\vec{m}$  erzeugt oder schon vorhandene ausgerichtet [1, S. 108]. Makroskopisch ist die Magnetisierung  $\vec{M}$  nach [2, S. 400] definiert als das mittlere Dipolmoment pro Volumen  $V$

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{V}. \quad (2.2)$$

Die Magnetisierung  $\vec{M}$  ist proportional zu der magnetischen Erregung  $\vec{H}$ . Mit der magnetischen *Suszeptibilität*  $\chi$  als Materialgröße und Proportionalitätskonstante kann die Magnetisierung  $\vec{M}$  nach [1, S. 401] ausgedrückt werden als

$$\vec{M} = \chi \vec{H}. \quad (2.3)$$

Das gesamte  $\vec{B}$ -Feld setzt sich aus den freien und gebundenen Strömen  $\vec{j}$  zusammen [2, S. 400], d.h.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}). \quad (2.4)$$

An dieser Stelle ist zu erkennen, dass für eine Suszeptibilität  $\chi > 0$  die äußere magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  entweder verstärkt oder für  $\chi < 0$  durch das induzierte magnetische Feld der Materie abgeschwächt wird. Durch Ausnutzung der materialabhängigen Größe der *magnetischen Permeabilität*, die als  $\mu_r = 1 + \chi$  definiert ist, erhalten wir die Formel

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.5)$$

für das  $\vec{B}$ -Feld [2, S. 401].

## 2.1. Diamagnetismus

Weist Materie die Eigenschaft auf, dass die magnetische Permeabilität  $\mu_r \ll 1$  und die magnetische Suszeptibilität  $\chi < 0$  ist, bezeichnen wir diese als *diamagnetisch* [1, S. 120]. Diamagneten besitzen selbst keine magnetischen Momente  $\vec{m}$ . Wenn sie aber in ein  $\vec{B}$ -Feld gebracht werden, fangen die Atome an, mit ihrer Elektronenhülle in Richtung der Feldlinien des  $\vec{B}$ -Feldes zu rotieren. Das erzeugt ein nach der LENZ'schen Regel dem äußeren  $\vec{B}$ -Feld entgegengesetzten, magnetischen Fluss  $B$  [2, S. 402]. Ein diamagnetischer Probekörper mit dem Volumen  $V$  und der Magnetisierung  $\vec{M} = (\chi/\mu_0) \cdot \vec{B}$  wird also in Richtung des Gradienten  $\text{grad } \vec{B}$  des  $\vec{B}$ -Feldes abgestoßen [1, S. 110], sprich

$$\vec{F} = \vec{M} V \cdot \text{grad } \vec{B}. \quad (2.6)$$

Dieser Effekt tritt auch bei *paramagnetischen* und *ferromagnetischen* Materialien auf. Da die Kraft im Vergleich zu der, die von einem Para- oder Ferromagneten erzeugt wird, sehr viel kleiner ist, kann dort der Effekt kaum gemessen werden. Materie mit der Eigenschaft, dass sie *nicht* para- oder ferromagnetisch ist, bezeichnen wir als diamagnetisch [1, S. 109].

## 2.2. Paramagnetismus

Im Gegensatz zu diamagnetischer Materie wird ein *paramagnetischer* Probekörper in ein  $\vec{B}$ -Feld hineingezogen, da hier die magnetische Suszeptibilität  $\chi > 0$  und daher der äußere magnetische Fluss  $B$  verstärkt wird. Paramagneten haben permanente magnetische Dipole, die sich ohne äußeres  $\vec{B}$ -Feld gegenseitig durch ihre thermische Bewegung neutralisieren. In einem  $\vec{B}$ -Feld werden diese teilweise entlang der Feldlinien ausgerichtet [1, S. 111]. Dadurch magnetisiert sich der Paramagnet und wird nun in Richtung des Gradienten des  $\vec{B}$ -Feldes angezogen. Die Magnetisierung  $\vec{M}$  und damit ihre magnetische Suszeptibilität  $\chi$  ist als thermischer Prozess abhängig von der Temperatur  $T$ . Es gilt

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (2.7)$$

nach dem CURIE'schen Gesetz, wobei  $C$  die CURIE-Konstante ist.

### 2.3. Energie des Magnetfeldes und Kraft auf Probekörper

Die Energie  $W_{mag}$  des  $\vec{B}$ -Feldes in einem Volumen  $V$  kann mittels der Energiedichte  $w_{mag}$  über die Relation

$$w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} \quad (2.8)$$

ermittelt werden [2, S. 399]. Stellt man diese Gl. (2.8) um und setzt die Formel  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  für ein  $\vec{B}$ -Feld mit  $\mu_r = 1$  (z.B. Luft als Medium), so erhält man

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot d\vec{B} = -\frac{1}{2} V \mu_0 (1 + \chi) H^2 = -\frac{(1 + \chi)}{2 \mu_0} B^2 \quad (2.9)$$

Damit ist nach [1, S. 134] die Kraft  $\vec{F}$  auf einen Probekörper mit dem Volumen  $V$  gegeben durch

$$\vec{F} = -\nabla W \quad \Rightarrow \quad F_i = \frac{V \chi B}{\mu_0} \left( \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \quad , \forall i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

## 3. Durchführung

### 3.1. Versuchsaufbau

In diesem Versuch soll das Verhalten verschiedener magnetischer Materialien in einem Magnetfeld untersucht werden. Dazu vermessen wir jeweils eine Probe aus *Mangan*, *Wismut* und *Tantal*, deren Masse und Nummer sind in der [Tab. 1](#) aufgeführt.

Zur Messung nutzen wir den in [Abb. 1a](#) dargestellte Versuchsaufbau. Die zwei Elektromagneten erzeugen ein starkes Magnetfeld, das durch die induktiv gekoppelten Polschuhe (schräg angeschnittene Enden eines Eisenjochs) so geformt wird, dass ein inhomogener Feldverlauf erreicht wird (vgl. [Abb. 1a](#)).

Mit geringeren Abstand des Eisenjochs nimmt die Feldstärke zu. Die Flächen des Polschuhes sind parallel entlang der Symmetrieachse der Hall-Sonde ( $\vec{B}$ -Feld homogen) und so abgeschrägt, dass der Abstand entlang der Höhenachse - Orthogonal zu der Symmetrieachse der Hall-Sonde und der Symmetrieachse der Spulen des Elektromagneten - mit zunehmender Höhe  $h$  zunimmt, d.h. hier im Aufbau nimmt die Feldstärke mit der Höhe

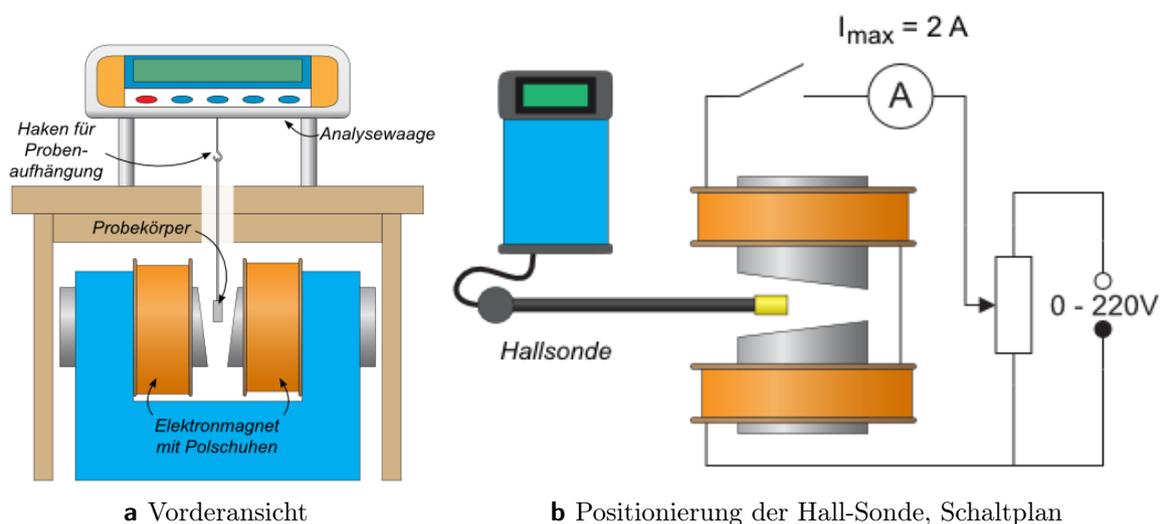
ab (Siehe dazu [Abb. 1a](#)).

Aus der Gl. (2.10) folgt, dass auf die Probekörper eine Kraft entlang der Richtung des Gradientens des  $\vec{B}$ -Feldes wirkt - Also nach oben oder nach unten, Richtung abhängig von der magnetischen Suszeptibilität  $\chi$  -, weshalb an dieser Achse die Kraft vermessen wird. Die Spulen der Elektromagneten werden mit Gleichstrom aus einem Netzteil betrieben, das 0 – 220 V und 0 – 2 A liefert. Um den Stromfluss zu kontrollieren, ist ein Amperemeter in dem Netzteil integriert. Darüber hinaus werden die Spulen und ein Schalter dazu in Reihe geschaltet (vgl. [Abb. 1b](#)).

**Tabelle 1:** Angaben zu den Probekörpern

Bezeichnung	Stoff	Masse [mg]	Dichte $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
D1 MN	Mangan (Mn)	425	7,2
D2 TA	Tantal (Ta)	842	16,6
D3 BI	Wismut (Bi)	774	9,8

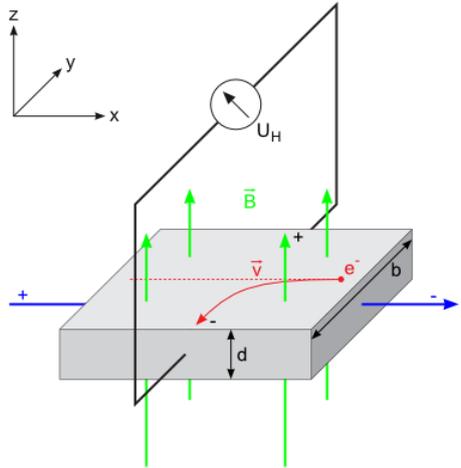
Die Messung der Kraft auf die Probe erfolgt mittels einer Analysewaage von Satorius. Diese ist oberhalb des Magneten positioniert und besitzt einen Haken, an dem die Proben im Magnetfeld zwischen den Polschuhen platziert und die Kraft bestimmt werden kann (vgl. [Abb. 1a](#)). Die Waage misst laut Hersteller bis auf 0,1 mg genau.



**Abbildung 1:** Die [Abb. 1a](#) zeigt den Versuchsaufbau schematisch aus der Vorderansicht und die [Abb. 1b](#) visualisiert die Positionierung der Hallsonde zwischen den Polschuhen und bildet den dazugehörigen elektrischen Schaltplan ab. Quelle: [3]

### 3.2. Hall-Sonde

Zur Bestimmung der magnetischen Flussdichte und deren Verlauf, wird eine *Hall-Sonde* verwendet. Diese ist auf einem Gleitschuh befestigt, womit sie zwischen die Elektromagneten geschoben werden kann. Über einen *Höhentrieb* kann dann die Höhe millimetergenau eingestellt und an der elektronischen Anzeige die magnetische Flussdichte in Tesla an der Spitze der Sonde abgelesen werden.



**Abbildung 2:** Funktionsprinzip einer Hall-Sonde. Quelle: [3]

Die Hall-Sonde nutzt zur Messung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  den HALL-Effekt aus. Fließen Ionen mit der Ladung  $q$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch ein Medium, das durch ein Magnetfeld  $\vec{B}$  durchsetzt ist, so wirkt die LORENTZkraft

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1)$$

auf diese [1, S. 95]. Daraus folgt, dass die Ionen orthogonal zur Bewegungsrichtung und zum Verlauf der Magnetfeldlinien abgelenkt werden (Rechte-Hand-Regel) (vgl. Abb. 2). Das bewirkt eine Ladungstrennung, da die positiv und negativ geladenen Ionen in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt werden. Es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  und der elektrischen Kraft  $\vec{F}_E$  des so erzeugten  $\vec{E}$ -Feldes ein. Die daraus resultierende Potenzialdifferenz wird als *Hall-Spannung*  $U_H$  bezeichnet. Beschrieben wird diese durch die Gleichung [1, S. 99]

$$U_H = \frac{I B R_H}{b}, \quad (3.2)$$

wobei  $I$  die Stromstärke und  $R_H$  der *Hall-Koeffizient* und  $b$  die Breite der Sonde ist (vgl. Abb. 2). Konkret beträgt  $I = 1 \text{ mA}$  und  $b = 0,35 \text{ mm}$  für die hier verwendete Hall-Sonde.

### 3.3. Versuchsdurchführung

Als erstes wird der Elektromagnet und das Amperemeter, wie in [Abb. 1b](#) abgebildet, verkabelt und die Stromstärke am Netzteil auf  $I_{sp} = 1,2 \text{ A}$  gestellt. Es ist darauf zu achten, die Stromstärke ständig nachzuregeln. Der Spulenstrom  $I_{sp}$  wird notiert, genauso wie die Masse und die Nummer der verwendeten Probekörper (vgl. [Tab. 1](#)).

Darauf wird der Ortsverlauf abhängig von der Höhe  $h$  des Magnetfeldes ausgemessen. Dazu bringen wir die Hall-Sonde mittig zwischen den Polschuh und messen von der Unterkante bis zur Oberkante in maximal 5 mm Schritten den magnetischen Fluss  $B(h)$ , siehe dazu die [Abb. 1b](#).

Als zweites ist die Position der Probekörper zu ermitteln. Dafür wird dieser an den Haken der Analysewaage gehängt und dessen Höhe mittels des Höhentriebs der Hall-Sonde (vgl. [Abb. 1a](#)) gemessen. Dies ist für jeden Probekörper dreimal durchzuführen.

Drittens soll die Kraft auf die drei Probekörper bestimmt werden. Dafür wird dieser an die Analysewaage gehängt und jeweils drei mal die Kraft mit und ohne Magnetfeld pro Probekörper gemessen. Konkret heißt dies, dass wir abwechselnd das Magnetfeld ein und ausschalten und das Gewicht messen, um über mögliche Veränderungen in der Kraftwirkung durch das Magnetfeld zu mitteln. Es ist darauf zu achten, dass der Probekörper frei zwischen den Polschuhen hängt.

Als viertes wird nochmals das Magnetfeld für die Stromstärken  $I_{sp} = 0,8 \text{ A}$ ,  $1,0 \text{ A}$ ,  $1,2 \text{ A}$ ,  $1,35 \text{ A}$  ausgemessen. Dafür machen wir jeweils Messungen im Abstand  $-10$ ,  $-5$ ,  $0$ ,  $5$ ,  $10 \text{ mm}$  zur Position des Probekörpers aus Mangan. Danach ermitteln wir noch die Kraft auf den Mangan-Probekörper für dieselben Stromstärken. Es werden jeweils wieder drei Messungen mit eingeschalteten und mit ausgeschalteten Magnetfeld durchgeführt. Die Werte für die Kraft bei  $I_{sp} = 1,2 \text{ A}$  haben wir aus der vorherigen Messung übernommen.

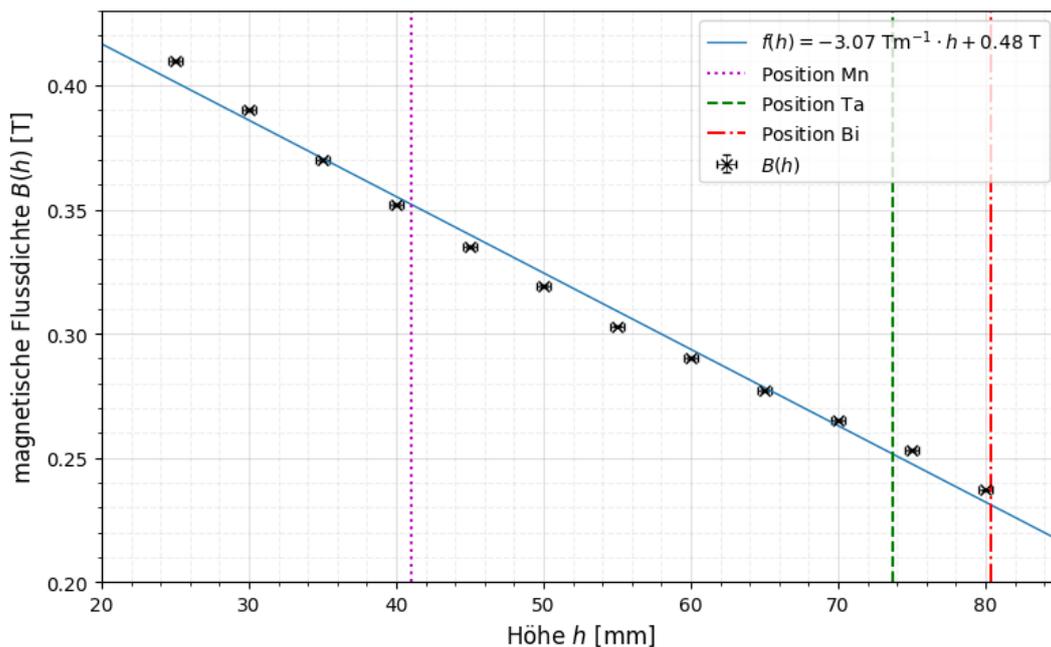
Eigentlich soll die Messung für  $I_{sp} = 1,4 \text{ A}$  statt für  $1,35 \text{ A}$  durchgeführt werden. Da aber bei höheren Stromstärken als  $1,35 \text{ A}$  der Schutzwiderstand gegriffen hat und eine höherer Regelung somit nicht möglich war, haben wir stattdessen die Messung für den maximal möglichen Werten von  $I_{sp} = 1,35 \text{ A}$  durchgeführt.

## 4. Auswertung

Zur Auswertung nutzen wir die Python Pakete NumPy und SymPy zum numerischen und symbolischen Rechnen. Für die physikalischen Konstanten haben wir auf das Paket SciPy.constants zurückgegriffen und die Plots mit Matplotlib erzeugt.

#### 4.1. Ortsverlauf der magnetischen Flussdichte $B(h)$

Als erstes untersuchen wir abhängig von der Höhe  $h$  den Verlauf des  $\vec{B}$ -Feld, das durch den Elektromagneten und die Polschuhe erzeugt wird. Dazu wird die magnetische Flussdichte  $B(h)$  gegen die Höhe  $h$  aufgetragen, was in [Abb. 3](#) dargestellt ist. Die beiden ersten Messwerte werden ausgelassen, da aufgrund der Geometrie der Polschuhe zu erwarten ist, dass die magnetische Flussdichte abnimmt und die Messwerte kleiner sind als die Nachfolgenden. Es ist davon auszugehen, dass sich deren Position noch unterhalb bzw. an der Kante des Polschuhes befindet. Alle Messwerte der Hall-Sonde sind um den *Offset* von 0,04 T korrigiert worden. Der Fehler des Offset findet in der Auswertung aber keine Beachtung, da wir keine Schwankungen in den Messwerten der Hall-Sonde während der Messung beobachtet konnten (Siehe dazu die Diskussion in [Unterabschnitt 5.1](#)). Daher schätzen wir den Fehler der magnetischen Flussdichte  $\sigma_B$  nur auf die Hälfte der kleinsten Stelle der Anzeige, sprich mit  $\sigma_B = 0,5 \text{ mT}$  und der Fehler durch den Höhentrieb  $\sigma_h$  auf  $\sigma = 0,5 \text{ mm}$ , also auf einen halben Skalenstrich, ab.



**Abbildung 3:** Magnetische Flussdichte  $B(h)$  gegen die Höhe  $h$  aufgetragen. Die Positionen der Probekörper sind markiert.

Die gemessenen Positionen der Probekörper im  $\vec{B}$ -Feld können der [Tab. 2](#) entnommen werden. Den systematischen Fehler der Einstellung des Höhentriebs haben wir größer als bei der Ausmessung des  $\vec{B}$ -Feldes mit  $\sigma_{h,\text{sys}} = 1 \text{ mm}$  abgeschätzt, da nicht ganz klar war, an welcher Position sich die Hall-Sonde genau auf der Höhe der Probe befand. Über die

drei Einzelmessungen wird gemittelt und zusätzlich der statistischen Fehler  $\sigma_{h,stat}$  nach (A.5) bestimmt. Der gesamte Fehler  $\sigma_h$  ist dann die quadratische Summe dieser beiden Fehler nach Gl. (A.6).

An den Positionen der Probekörper, die auch in Abb. 3 markiert sind, bestimmen wir die magnetische Flussdichte  $B(h)$  und deren Gradient  $\text{grad } B(h)$ . Letztere ist für alle Position identisch, da sich die Messwerte gut durch eine lineare Regression approximieren lassen (vgl. Abb. 3). Deren Berechnung ergibt einen Wert von  $\text{grad } B = (-3,075 \pm 0,009) \text{ T m}^{-1}$  für die Steigung und einen Wert von  $B_0 = (0,4381 \pm 0,0005) \text{ T}$  für den Ordinatenabschnitt. Für die lokale Flussdichte  $B(h_0)$  an den Positionen  $h_0$  der Probekörper definieren wir die Funktion

$$B(h_0) = \text{grad } B \cdot h_0 + B_0. \quad (4.1)$$

Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.7) erhalten wir die dazugehörige Fehlerformel

$$\sigma_B^2 = \sigma_{\text{grad } B}^2 h^2 + \sigma_h^2 \text{grad } B^2 + \sigma_{B_0}^2, \quad (4.2)$$

wobei  $\sigma_B$  der Fehler der magnetischen Flussdichte  $B(h)$ ,  $\sigma_h$  der Fehler der Höhenmessung und  $\sigma_{B_0}$  der Fehler des Ordinatenabschnittes  $B_0$  ist. Die anderen Fehler ergeben sich durch den Fehler der numerisch bestimmten, linearen Regressionsfunktion. Die berechneten Werte für die magnetische Flussdichte  $B(h_0)$  und deren Gradienten  $\text{grad } B(h) \vec{e}_h = \frac{\partial B(h)}{\partial h}$  können der Tab. 2 entnommen werden.

**Tabelle 2:** Position  $h_0$  der Proben, Flussdichte  $B(h)$  bzw. Gradient der Flussdichte  $\text{grad } B(h)$  an dieser Position  $h_0$ .

Stoff	Höhe $h$ [mm]	Flussdichte $B$ [T]	$\frac{\partial B(h)}{\partial h}$ [T m <sup>-1</sup> ]
Mangan	41 ± 1	0,352 ± 0,003	-3,075 ± 0,009
Tantal	73 ± 1	0,252 ± 0,003	
Wismut	80 ± 1	0,231 ± 0,003	

In Abb. 4 haben wir das Produkt

$$B(h) \cdot \frac{\partial B(h)}{\partial h} \quad (4.3)$$

aufgetragen und dessen Fehler  $\sigma_{B \frac{\partial B(h)}{\partial h}}$  mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.7) bestimmt. Daraus ergibt sich die Fehlerformel

$$\sigma_{B \frac{\partial B(h)}{\partial h}}^2 = \sigma_B^2 \left( \frac{\partial B(h)}{\partial h} \right)^2 + \sigma_{\text{grad } B}^2 B(h)^2 \quad (4.4)$$

Auch hier beobachtet man einen linearen Zusammenhang, der wegen der Linearität von  $B(h)$  in Abb. 3 und der Konstanz der Gradienten zu erwarten ist. Daher wird zur linearen Regression die Ausgleichsgerade aus Abb. 3 mit dem Gradienten  $\text{grad } B$  multipliziert. Es ist erkennbar, dass aufgrund des negativen Wertes, der Gradient entgegen der Höhe  $h$  nach unten zeigt (vgl. Tab. 2 und Abb. 3). Es fällt in Abb. 4 auf, dass das Produkt  $B \frac{\partial B}{\partial h}(h)$  mit zunehmender Höhe linear abnimmt. Daraus folgt die Inhomogenität des  $\vec{B}$ -Feldes in Richtung der Höhe  $h$ .

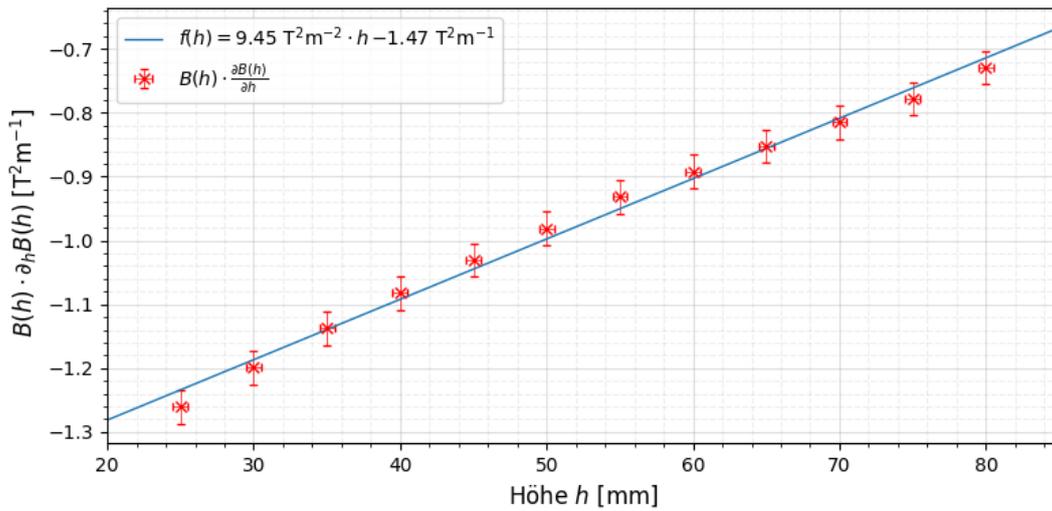


Abbildung 4: Das Produkt  $B \frac{\partial B}{\partial h}(h)$  gegen die Höhe  $h$  aufgetragen.

## 4.2. Kraft $F_h$ auf Probekörper bei $I_{sp} = 1,2 \text{ A}$

Die Kraft  $F_h$ , also die Kraft auf die Probekörper in Richtung  $h$  (entspricht der Richtung des Gradienten des erzeugten  $\vec{B}$ -Feldes), wird aus der Differenz der mit der Analysewaage gemessenen Gewichte bestimmt. Über die Massendifferenz  $\Delta m = m_{aus} - m_{ein}$  zwischen den Messwerten mit angeschalteten und ausgeschalteten Elektromagneten kann dann die Kraft  $F_h$  aus der Gewichtskraft ermittelt werden, d.h.

$$F = \Delta m g \quad (4.5)$$

Die einzelnen Messwerte werden entsprechend Gl. (A.2) gemittelt und der zugehörige statistische Fehler  $\sigma_{m,stat}$  mit Gl. (A.5) bestimmt. Als systematischen Fehler  $\sigma_{m,syst}$  verwenden wir den vom Hersteller Satorius angegebenen Fehler 0,1 mg der Analysewaage. Der Fehler der Kraft  $\sigma_F$  kann wieder mit der GAUSSSchen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.7) bestimmt werden. Wir erhalten die Formel

$$\sigma_F^2 = 2\sigma_m^2 g^2 \quad (4.6)$$

Den Fehler  $\sigma_m$  der Masse setzt sich dann aus dem systematischen und statistischen Fehler  $\sigma_{m,syst}$  und  $\sigma_{m,stat}$  als quadratische Summe Gl. (A.6) zusammen.

**Tabelle 3:** Kraft auf Probekörper bei  $I_{sp} = 1,2$  A

Stoff	Kraft $F_h$ [ $10^{-6}$ N]
Mangan	$-52 \pm 8$
Tantal	$-9 \pm 8$
Wismut	$25 \pm 8$

Die berechneten Kräfte  $F_h$  für die drei Probekörper bei einem Spulenstrom von  $I_{sp} = 1,2$  A sind in der Tab. 3 aufgeführt.

### 4.3. (Spezifische) magnetische Suszeptibilität

Die magnetische Suszeptibilität  $\chi$  kann berechnet werden, indem die Gl. (2.10) nach  $\chi$  umstellt wird. Wir erhalten die Formel

$$\chi = \frac{F_h \mu_0}{V B \frac{\partial B}{\partial h}}. \quad (4.7)$$

Das Volumen  $V$  des Probekörpers steht in Relation zu seiner Masse  $M$  und seiner Dichte  $\rho$  und kann als  $V = M/\rho$  ausgedrückt werden. Die Dichte  $\rho$  und die Masse  $M$  der Probekörper sind in der Tab. 1 angegeben.

Für den Gradienten des  $\vec{B}$ -Feldes, für die magnetische Flussdichte an den Positionen der Probekörper  $B(h)$  und für die Kraft  $F_h$ , nutzen wir die zuvor in [Unterabschnitt 4.2](#) und [Unterabschnitt 4.4](#) bestimmten Werte. Die Werte der magnetische Flussdichte  $B(h)$  und deren Gradient  $\text{grad } B(h)$  können in der [Tab. 2](#) und die Kräfte  $F_h$  in der [Tab. 3](#) nachvollzogen werden.

Mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.1.5) berechnet sich der Fehler  $\sigma_\chi$  der magnetischen Suszeptibilität zu

$$\sigma_\chi^2 = \sigma_F^2 \left( \frac{\mu_0 \rho}{M B \frac{\partial B}{\partial h}} \right)^2 + \sigma_B^2 \left( \frac{F \mu_0 \rho}{M B^2 \frac{\partial B}{\partial h}} \right)^2 + \sigma_{\frac{\partial B}{\partial h}}^2 \left( \frac{F \mu_0 \rho}{M B \left( \frac{\partial B}{\partial h} \right)^2} \right)^2. \quad (4.8)$$

Die *spezifische* Suszeptibilität ist definiert als

$$\frac{\chi}{\rho} \quad (4.9)$$

und gibt folglich die Suszeptibilität  $\chi$  pro Dichte  $\rho$  an. Der Fehler  $\sigma_{\chi/\rho}$  wird auch hier mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.7) bestimmt. Wir erhalten die Fehlerformel

$$\sigma_{\chi/\rho} = \frac{\sigma_{\chi}}{\rho} \quad (4.10)$$

Die berechnete Suszeptibilität und spezifische Suszeptibilität sind in der [Tab. 4](#) aufgeführt.

**Tabelle 4:** Die berechnete, spezifische magnetische Suszeptibilität  $\chi/\rho$  bzw. magnetische Suszeptibilität  $\chi$  der Probekörper

Stoff	$\chi$ [ $10^{-4}$ ]	$\chi/\rho$ [ $10^{-11}$ cm <sup>3</sup> /g]
Mangan	$10 \pm 2$	$14 \pm 2$
Tantal	$3 \pm 3$	$1,7 \pm 1,5$
Wismut	$-5,4 \pm 1,7$	$-5,6 \pm 1,7$

#### 4.4. $\vec{B}$ -Feld bei verschiedenen Spulenströmen $I_{sp}$

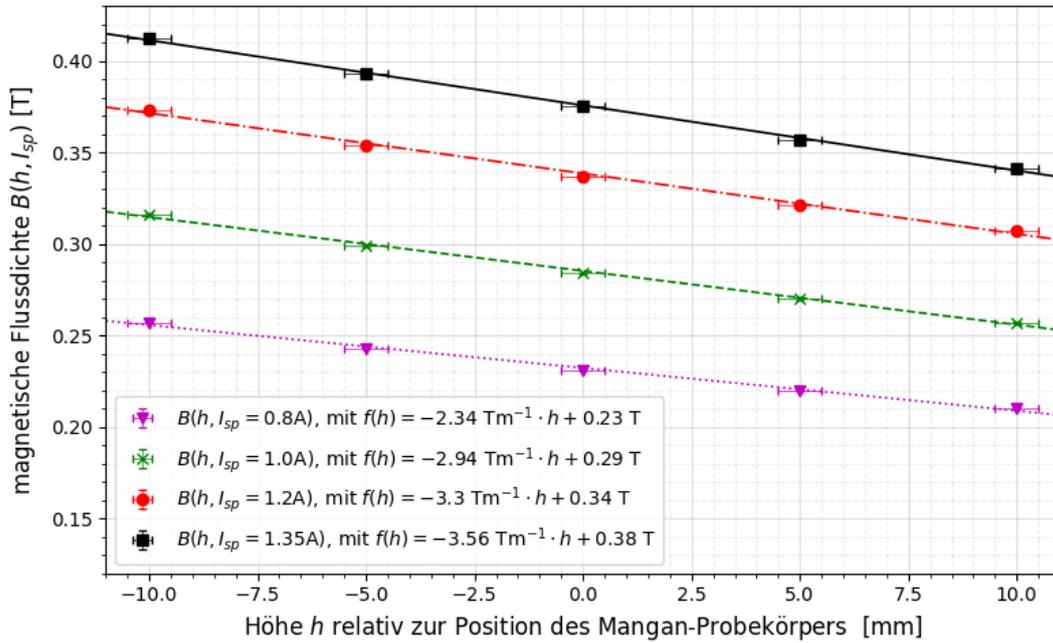
Im weiteren wird der Feldverlauf des  $\vec{B}$ -Feldes für verschiedene Spulenströme  $I_{sp}$  untersucht.

Dazu betrachten wir an der Position  $h = (41 \pm 1)$  mm (vgl. [Tab. 2](#)) des Mangan-Probekörpers das  $\vec{B}$ -Feld. Indem die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  gegen die Höhe  $h$  auftragen (vgl. [Abb. 5](#)) und der linearen Zusammenhang durch eine lineare Regression für die einzelnen Spulenströme  $I_{sp} = 0,8, 1,0, 1,2, 1,35$  A approximiert wird, können die Gradienten der magnetischen Flussdichten  $B(h, I_{sp})$  ermittelt werden. Die Steigung  $m$  der Regressionsfunktion entspricht dem Gradient  $\text{grad } B(h, I_{sp})$  der magnetischen Flussdichte  $B(h, I_{sp})$ , also ist  $\text{grad } B \simeq m$  (vgl. [Abb. 5](#)). Den Fehler durch die Spannungsquelle  $\sigma_{I_{sp}}$  haben wir, da keine Abweichungen beobachtet werden konnten, auf die Hälfte eines Skalenstrichs abgeschätzt. D.h.  $\sigma_{I_{sp}} = 0,025$  A. Die ermittelten Werte können der [Tab. 5](#) entnommen werden.

**Tabelle 5:**  $\text{grad}B$  für Spulenstrom  $I_{sp} = 0,8, 1,0, 1,2, 1,35$  A aus Fit-Parameter

$I_{sp}$ [A]	$\text{grad } B$ [T m <sup>-1</sup> ]
0,8	$-2,34 \pm 0,03$
1,0	$-2,94 \pm 0,03$
1,2	$-3,30 \pm 0,03$
1,4	$-3,56 \pm 0,03$

Der berechnete Gradient  $\text{grad } B(I_{sp})$  in [Abb. 7](#) und die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  in [Abb. 6](#) sind gegen den Spulenstrom  $I_{sp}$  aufgetragen. Für den Gradienten nutzen wir die in [Tab. 5](#) aufgeführten Werte. Es ist jeweils ein linearer Zusammenhang zwischen den



**Abbildung 5:** Die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  für den Strom  $I_{sp} = 0,8, 1,0, 1,2, 1,35$  A gegen die Höhe  $h$  aufgetragen in Relation zur Position des Mangan-Probekörpers bei  $h = (41 \pm 1)$  mm.

Größen und dem Spulenstrom  $I_{sp}$  zu beobachten. In den [Abb. 7](#) und [Abb. 6](#) ist daher eine lineare Regression durch die Messwerte gelegt worden.

In [Abb. 6](#) ist erkennbar, dass die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  mit steigenden Spulenstrom  $I_{sp}$  zunimmt und mit zunehmender Höhe  $h$  abnimmt. Daraus kann gefolgert werden, dass

$$B(h, I_{sp}) \propto I_{sp} \text{ und } B(h, I_{sp}) \propto \frac{1}{h}. \quad (4.11)$$

ist. Dieses Verhalten lässt sich damit erklären, dass das  $\vec{B}$ -Feld laut der vierten MAXWELL-Gleichung Gl. (2.1) durch das kreisförmige Strömen des Spulenstroms  $I_{sp}$  in den Spulen des Elektromagnetens erzeugt wird. Aus der Gl. (2.1) folgt direkt die Proportionalität  $I \propto B$  des Stroms  $I$  zu dem Betrag der magnetischen Flussdichte  $B$ . Des Weiteren ist zu erwarten, dass wegen der abgeschrägten Form des Polschuhs, wie schon in [Unterabschnitt 3.1](#) erläutert, die magnetische Flussdichte  $B(h)$  mit dem zu nehmenden Abstand der Endstücke des Eisenjochs abnimmt, also in Richtung der Höhe  $h$ . Dies kann auch in [Abb. 3](#) zu erkennen.

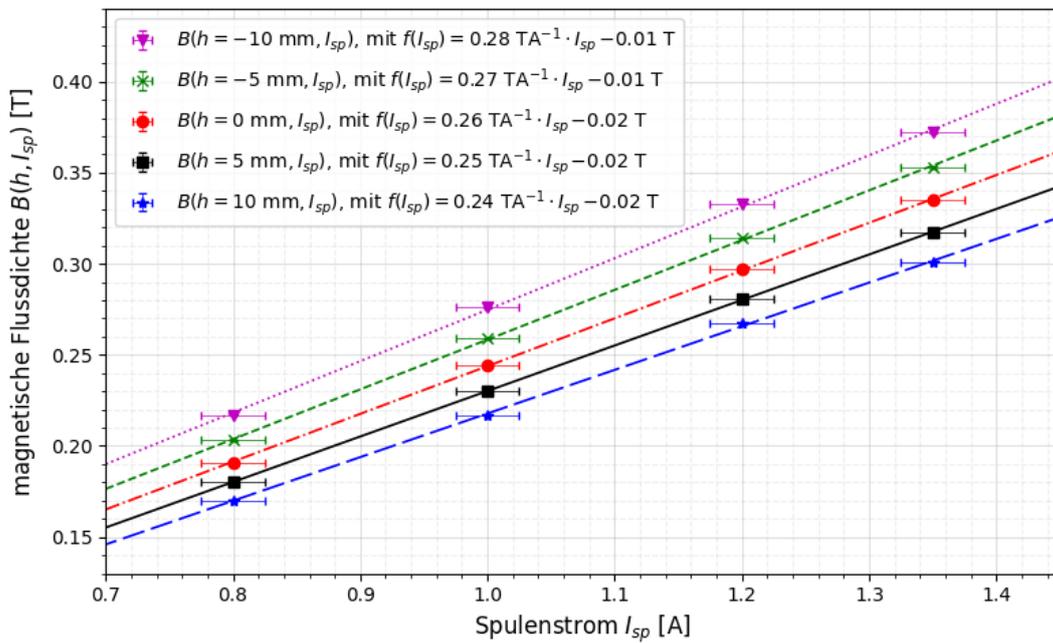


Abbildung 6: Magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  - um die Position des Mangan-Probekörpers gegen  $I_{sp}$  aufgetragen

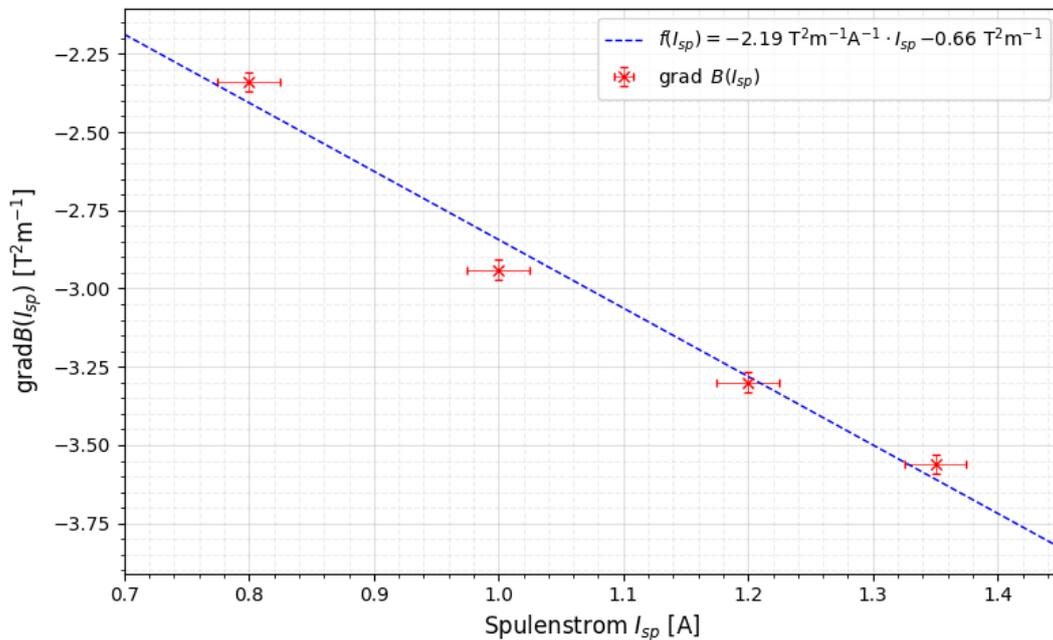


Abbildung 7: Gradient der magnetische Flussdichte  $\text{grad}B(h, I)$  - gegen  $I_{sp}$  aufgetragen

In [Abb. 7](#) ist weiter zu beobachten, dass

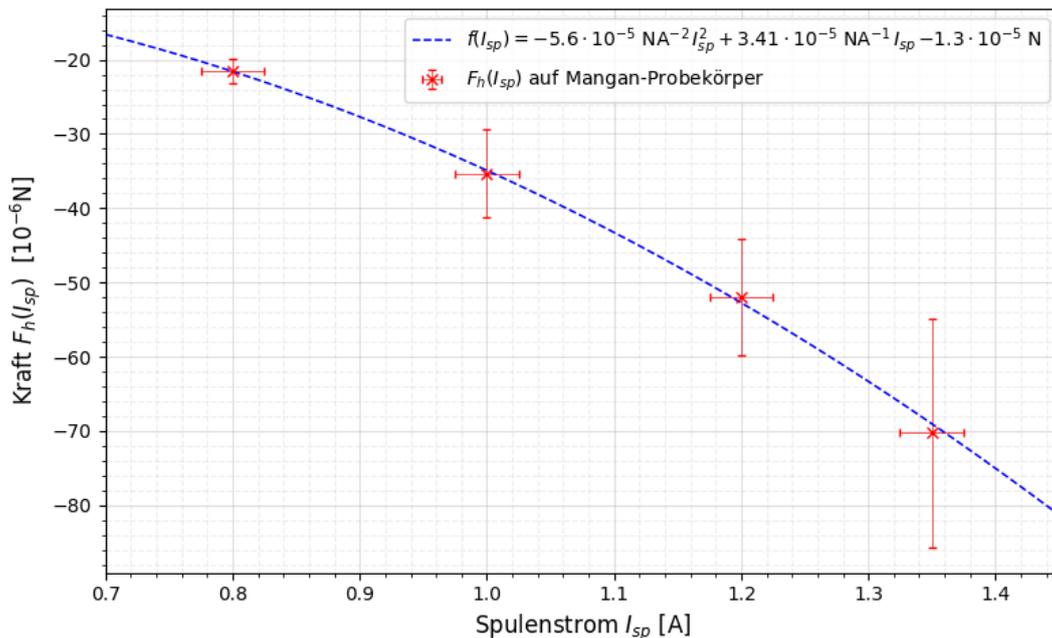
$$\text{grad } B(I_{sp}) \propto I_{sp}. \quad (4.12)$$

Der Betrag des Gradientens nimmt also mit steigender Stromstärke zu. Dies ist auch anhand der nach oben hin auseinander laufenden Graphen in [Abb. 6](#) zu erkennen.

Die Inhomogenität des  $\vec{B}$ -Feldes nimmt entsprechend mit dem Spulenstrom  $I_{sp}$  zu, was uns nach Gl. (2.6) erwarten lässt, dass die Kraft  $F_h(I_{sp})$  abhängig vom Spulenstrom  $I_{sp}$  ist.

#### 4.5. Kraft $F_h$ auf Mangan-Probekörper bei verändertem Spulenstrom $I_{sp}$

Abschließend wird die Kraft  $F_h(I_{sp})$  bei dem durch den Spulenstrom  $I_{sp}$  veränderten  $\vec{B}$ -Feld analysiert. Als Muster dient der Mangan-Probekörper. Zur Bestimmung der Kraft  $F_h(I_{sp})$  nutzen wir wieder die Gl. (4.5) und die zugehörige Fehlerformel Gl. (4.6). Die Rechnung wird analog zu der in [Unterabschnitt 4.2](#) durchgeführt. Die berechneten Kräfte  $F(I_{sp})$  sind in [Abb. 8](#) gegen Spulenstrom  $I_{sp}$  aufgetragen.



**Abbildung 8:** Die Kraft  $F_h(I_{sp})$  auf den Mangan-Probekörper gegen die Stromstärke  $I_{sp}$  aufgetragen.

Die Messwerte lassen sich durch eine quadratische Regression in [Abb. 8](#) approximieren. Es lässt sich also ein quadratischer Zusammenhang zwischen der Kraft  $F_h$  und des

Spulenstroms  $I_{sp}$  vermuten, der als ein Polynom

$$F_h(I_{sp}) = \alpha \cdot I_{sp}^2 + \beta \cdot I_{sp} + \gamma \quad (4.13)$$

mit den Faktoren  $\alpha, \beta, \gamma$  ausdrückt werden kann. Diese dienen als Fit-Parameter. Deren numerische ermittelten Werte sind in der [Tab. 6](#) aufgeführt.

Die Kraft  $F_h(I_{sp})$  kann auch aus der Gl. (2.10) und aus den Messwerten für die magnetische Flussdichte  $B(h = (41 \pm 1) \text{ mm}, I_{sp})$  und dem Gradienten  $\text{grad } B(I_{sp})$  und aus den Materialdaten berechnet werden. Setzen wir in Gl. (2.10) die Formel  $V = M/\rho$  für das Volumen  $V$  ein, so ergibt sich die Gleichung

$$F_h = \frac{M \chi B \text{ grad } B}{\rho \mu_0}. \quad (4.14)$$

In [Unterabschnitt 4.4](#) haben wir festgestellt, dass sowohl die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  als auch ihr Gradient  $\text{grad } B(I_{sp})$  proportional zum Spulenstrom  $I_{sp}$  ist. Aus diesem Resultat und der Gl. (4.14) folgt, dass die Kraft  $F_h(I_s)$  in einem quadratischen Zusammenhang zum Spulenstrom  $I_{sp}$  steht, was mit der quadratischen Regression in [Abb. 8](#) übereinstimmt.

Explizit kann analog zu Gl. (4.1) die magnetische Flussdichte  $B(I_{sp})$  und den Gradienten  $\text{grad } B(I_{sp})$  mit den linearen Regressionsfunktionen in [Abb. 6](#) und [Abb. 7](#) ermittelten werden, d.h.

$$B(I_{sp}) = \frac{\partial B(I_{sp})}{\partial I_{sp}} \cdot I_{sp} + B_0. \quad (4.15)$$

$$\text{grad } B(I_{sp}) = \frac{\partial \text{grad } B(I_{sp})}{\partial I_{sp}} \cdot I_{sp} + \text{grad } B_0. \quad (4.16)$$

Setzen wir die Ausdrücke Gl. (4.15) und Gl. (4.16) in Gl. (4.14) eingesetzt, so erhalten wir

$$F_h(I_{sp}) = \frac{M \chi}{\rho \mu_0} \left( \frac{\partial B(I_{sp})}{\partial I_{sp}} \cdot I_{sp} + B_0 \right) \left( \frac{\partial \text{grad } B(I_{sp})}{\partial I_{sp}} \cdot I_{sp} + \text{grad } B_0 \right) \quad (4.17)$$

$$= \frac{M \chi}{\rho \mu_0} \left[ \frac{\partial B}{\partial I_{sp}} \frac{\partial \text{grad } B}{\partial I_{sp}} \cdot I_{sp}^2 + \left( \frac{\partial B}{\partial I_{sp}} \text{grad } B_0 + \frac{\partial \text{grad } B}{\partial I_{sp}} B_0 \right) \cdot I_{sp} + B_0 \text{ grad } B_0 \right] \quad (4.18)$$

Aus der Gl. (4.17) lassen sich dann die Faktoren  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den entsprechenden korrespondierenden Termen bestimmen (vgl. dazu Gl. (4.13)). Dafür nutzen wir die Werte der Suszeptibilität von Mangan  $\chi$  in [Tab. 4](#) aus [Unterabschnitt 4.3](#) und die durch die lineare

Regression in [Abb. 6](#) und in [Abb. 7](#) numerisch bestimmten Werte der magnetische Flussdichte  $B(h = (41 \pm 1) \text{ mm}, I_{sp})$  und des Gradienten  $\text{grad } B(I_{sp})$ . Die berechneten Faktoren  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind in der [Tab. 6](#) aufgeführt. Es ist auch eine Fehlerrechnung mit der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung Gl. (A.7) durchgeführt worden. Die mit dem symbolischen Rechner SymPy bestimmte Fehlerformeln werden hier aufgrund des Umfangs nicht aufgeführt, da es nur um die prinzipielle Prüfung des Zusammenhangs gehen soll.

**Tabelle 6:** Vergleich der Fit-Parameter. Regression in der Form des Polynoms  $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Parameter	Aus Gl. (4.17)	Fit-Funktion
$\alpha [10^{-5} \text{ N/A}^2]$	$-2,8 \pm 0,5$	$-6 \pm 12$
$\beta [10^{-5} \text{ N A}^{-1}]$	$-0,64 \pm 0,10$	$4 \pm 24$
$\gamma [10^{-5} \text{ N}]$	$0,059 \pm 0,010$	$-2 \pm 12$

## 5. Diskussion

### 5.1. Ausmessung des $\vec{B}$ -Feldes

Bei der Ausmessung des Magnetfeldes ist uns die hohe Präzision sowohl des Netzteils, das einen konstanten Strom geliefert hat, als auch der Hall-Sonde aufgefallen. Diese ist auf einem leichtgängigen Gleitschuh gelagert gewesen. Der Höhentrieb hat sich maßgenau einstellen lassen. Darüber hinaus haben wir festgestellt, dass die angezeigte magnetische Flussdichte bis auf die letzte Kommastelle der Anzeige keine Schwankungen aufwies. Dies spricht für die Genauigkeit der Hall-Sonde und illustriert die Stabilität des zwischen den Polschuhen erzeugten  $\vec{B}$ -Feldes. Insbesondere haben wir beobachtet, dass das  $\vec{B}$ -Feld sehr homogen auf der Symmetrieachse zwischen den Polschuhen gewesen ist. Was, wie in [Unterabschnitt 3.1](#) erläutert, von der Geometrie her zu erwarten ist. Wurde die Hall-Sonde etwas rein oder rausgeschoben, konnten keine nennenswerten Veränderungen in der magnetischen Flussdichte festgestellt werden. Daher haben wir den Fehler der magnetischen Flussdichte sehr gering auf  $\sigma_B = 0,5 \text{ mT}$  abgeschätzt und den durch die Hall-Sonde verursachten Fehler in der Höhenmessung auf  $\sigma_h = 0,5 \text{ mm}$

Diese Beobachtung spiegelt sich in der Auswertung des Verlaufes des  $\vec{B}$ -Feldes in [Abb. 3](#), genauso auch im Verlauf des  $\vec{B}$ -Feldes um die Position von Mangan für die verschiedenen Spulenströme  $I_{sp}$  in [Abb. 5](#) und [Abb. 6](#) wieder. Es sind jeweils eindeutig lineare Zusammenhänge zu beobachten, die wie schon in dem [Unterabschnitt 4.5](#) angesprochen, mit der theoretischen Erwartung korrelieren.

Für die Messung des Magnetfeldes unter verschiedenen Spulenströmen  $I_{sp}$  liegen die Messwerte alle in einem  $1\sigma$  Intervall um die Ausgleichsgeraden (vgl. [Abb. 5](#) und [Abb. 6](#)).

Es handelt sich folglich um eine gelungene Messung. Für die erste Messung, also den Ortsverlauf aufgetragen in [Abb. 3](#), ist das nicht der Fall. Hier liegen die Werte alle in einem  $1$  bis  $3\sigma$  Intervall um die Ausgleichsgeraden. Insbesondere ist hier ein leichter *Knick* im Verlauf zwischen der Position von Mangan und Tantal festzustellen. Eine Vermutung ist, dass dort ein leichtes Nachlassen des Spulenstroms  $I_{sp}$  nicht bemerkt bzw. durch Nachregeln korrigiert worden ist. Auch eine Inhomogenität des  $\vec{B}$ -Feldes in diesem Bereich kann ein Grund sein.

Eine weitere mögliche Erklärung könnte die beobachtete Veränderung des *Offset* der Hall-Sonde liefern. Dieser ist zwischendurch von anfänglich  $-30$  mT auf  $-50$  mT gestiegen. Es ist aber nicht mehr ganz klar, in welchen Zeitraum bei den Messungen sich dieser verändert hat. Da es uns nur aufgefallen ist, wir es aber nicht systematisch kontrolliert haben. Dies hätte wir besser dokumentieren müssen. Aufgrund des geringen Wertes im Vergleich zu den Messwerten berücksichtigen wir dessen Fehler auch nicht in der Auswertung, sondern es wird nur pauschal mit dem Mittelwert von  $40$  mT alle Messwerte korrigiert, obwohl anzunehmen ist die Hall-Sonde bei den Messungen verschiedene Offsets hatte. Vor diesem Hintergrund lässt sich diskutieren, ob der Fehler  $\sigma_B = 0,5$  mT für die magnetische Flussdichte nicht deutlich größer hätte gewählt werden müssen. Insbesondere da die resultierenden Werte auch Einfluss auf die berechneten Werte für die Suszeptibilitäten haben.

Das Auftragen des Produktes  $B(h) \cdot \text{grad } B(h)$  bestätigt die Linearität. Der Fehler des Gradienten fungiert als eine Art *statistischer Fehler* und bezieht die Schwankungen mit ein. Dadurch liegen die Messpunkte alle in einem  $1\sigma$ -Intervall um die eingezeichnete Ausgleichsgerade. Die berechnete Größe entspricht der Abhängigkeit der Kraft  $F_h$  auf einen Probekörper im  $\vec{B}$ -Feld, was an Gl. (2.10) nachvollzogen werden kann. Es ist daher zu erwarten, dass die Kraft  $\vec{F}_h$  für eine positive Suszeptibilität  $\chi$  negativ ist und nach unten zeigt und für negative Suszeptibilitäten  $\chi$  sich dies umkehrt. Die Überprüfung an den Ergebnissen für die Kräfte  $F_h$  auf die drei Probekörper (vgl. [Tab. 3](#)) und deren Suszeptibilität (vgl. [Tab. 4](#)) bestätigt dies.

Die gefundenen linearen Abhängigkeiten des magnetischen Fluss  $B(h, I_{sp})$  und des Gradienten  $\text{grad } B(I)$  entsprechen unserer Erwartung, wie schon in [Abschnitt 4](#) erläutert. In [Abb. 7](#) liegen alle Werte in einem  $1$  bis  $2\sigma$ -Intervall, um die numerisch berechnete Ausgleichsgerade. Dies zeigt, dass der Gradient mit dem Spulenstrom  $I_{sp}$  zunimmt. Also auch die Inhomogenität des  $\vec{B}$ -Feldes in Richtung von  $h$ . Aus Gleichung (2.10) folgt daher, dass die Kraft auf die Probekörper mit dem Spulenstrom  $I_{sp}$  zunimmt, was in der [Abb. 8](#) bestätigt wird.

Es sei hier auch noch angemerkt, dass wir kein Einfluss der Messung bei  $I_{sp} = 1,35$  A statt  $1,4$  A auf die Messergebnisse feststellen konnten.

## 5.2. Probekörper im $\vec{B}$ -Feld

Bei Mangan und Tantal handelt es sich um *paramagnetische* und bei Wismut um einen *diagnetischen* Stoff. Aus [Unterabschnitt 2.1](#) und [Unterabschnitt 2.2](#) ist bekannt, dass für Paramagneten die *Suszeptibilität*  $\chi > 0$  und für Diagneteten  $\chi < 0$  ist. Dies stimmt mit den aus den Messwerten ermittelten Werten überein (vgl. [Tab. 4](#)).

Zum Vergleich der berechneten Werte der magnetische Suszeptibilität  $\chi$  bzw. spezifischen Suszeptibilität stehen Literaturwerte angegeben als *molare* Suszeptibilität  $\chi_{mol}$  zu Verfügung [[4](#), S. 122]. Diese ist als

$$\chi_{mol} = M_{mol} = \frac{\chi M_{mol}}{\rho} \quad (5.1)$$

definiert, wobei  $M_{mol}$  die molare Masse ist. Diese kann mit der Formel

$$M_{mol} = N_A \cdot m_A, \quad (5.2)$$

bestimmt werden, wobei  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  die AVOGADRO-Konstante [[2](#), Anhang] und die  $M_A$  die *Atommasse* ist [[5](#), S. 217]. Die umgerechneten Werte sind in der [Tab. 7](#) aufgeführt.

**Tabelle 7:** Vergleich der gemessenen magnetischen Suszeptibilität  $\chi$  mit dem Literaturwert. Umgerechnet als molare Suszeptibilität  $\chi M/\rho$ . Als Quelle für die Atommasse  $m_A$  dient [[2](#), Anhang].

Stoff	Mangan Mn	Tantal Ta	Wismut Bi
Atomaremasse $m_A$ [ $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ]	54,94	181,0	209,0
Literaturwert $\chi M/\rho$ [ $10^{-3} \text{ cm}^3/\text{mol}$ ]	6,42	1,92	-3,52
Messwert $\chi M/\rho$ [ $10^{-3} \text{ cm}^3/\text{mol}$ ]	$7,8 \pm 1,2$	$3 \pm 3$	$-12 \pm 4$

Es ist eine hohe Übereinstimmung mit den Literaturwerten festzustellen. Für Mangan liegt die Abweichungen im  $2\sigma$ , für Tantal im  $1\sigma$  und für Wismut  $3\sigma$  Intervall. Auf die Proben werden trotz des starken Magnetfeldes nur sehr kleine Kräfte ausgeübt (vgl. [Tab. 3](#)). Was es generell schwierig gemacht hat, diese zu messen. Bei der Analysewaage hab wir trotz ihrer hohen Genauigkeit von 0,1 mg deutliche Schwankungen in den angezeigten Gewichten beobachtet. Zum Teil pendelten die Werte deutlich, was sich in den hohen statistischen Fehler niederschlägt. Insbesondere ist der Fehler bei Tantal genauso groß wie der Messwert selbst.

Eine mögliche Erklärung ist, dass die Probekörper durch die Änderungen der auf sie einwirkende Kraft, da die Spulen abwechselnd ein und aus geschaltet wurden, mit leichten

Schwingungen reagiert haben. Auch mögliche Erschütterungen können dafür verantwortlich sein, auch wenn der Aufbau gedämpft gelagert wurde, z.B. durch einen Luftzug (Die Probe hing am Haken und war folglich nicht wie sonst bei einer Analysewaage durch einen Schutzkasten abgeschirmt). An dieser Stellen wäre es sinnvoll gewesen, deutlich mehr Werte aufzunehmen, um die Schwankungen auszumitteln und den Fehler zu reduzieren.

Grundsätzlich bestätigt aber die gute Übereinstimmung mit den Literaturwerten, die schon zuvor festgestellte Präzision des Messaufbaus und der Messung, was sicherlich zu den guten Messergebnissen beigetragen hat.

### 5.3. Kraft $F_h$ auf Probekörper

Abschließend ist noch die Kraftwirkung auf die Probe bei der Änderung des Spulenstroms  $I_{sp}$  zu diskutieren: In [Abb. 8](#) ist zu erkennen, dass der Betrag der Kraft mit steigendem Strom zunimmt. Dabei haben wir eine quadratischer Zusammenhang vermutet, was durch die gut Approximation durch die quadratische Regressionfunktion unterstützt wird. Alle Werte liegen deutlich in einem  $1\sigma$  Intervall um dem Graphen. Es ist zu beobachten, dass die Fehler bei höheren Spulenströmen  $I_{sp}$  um ein vielfaches größer sind (vgl. [Abb. 8](#)). Der Grund ist, dass die statistischen Fehler der Massen für diese Werte sehr groß sind, was aus den beschriebenen Schwankungen resultiert. Diese nehmen über den Zeitraum der Messung zu. Vermutlich wäre es sinnvoll gewesen eine längere Zeit zwischen den Einzelmessungen zu warten, damit sich der Probekörper wieder in eine Ruhelage bewegen kann.

Wie die Auswertung in [Unterabschnitt 4.4](#) gezeigt hat, hängt die Stärke des  $\vec{B}$ -Feldes von dem Spulenstrom  $I_{sp}$  ab. Dies bewirkt in der Geometrie dieses Versuchsaufbaus, dass sowohl die magnetische Flussdichte  $B(h, I_{sp})$  als auch deren Gradient  $\text{grad } B(h, I_{sp})$  linear zum Spulenstrom  $I_{sp}$  sind. Da laut [Gl. \(2.10\)](#) die Kraft auf dem Probekörper vom Produkt  $\text{grad } B \cdot B$  abhängt, folgt daraus der quadratischer Zusammenhang.

Dies konnten wir aber nicht durch die direkte Überprüfung in [Unterabschnitt 4.4](#) mit den vorherigen Messergebnissen und [Gl. \(2.10\)](#) bestätigen. Siehe dazu die [Tab. 6](#). Die Werte weichen jeweils um ein Vielfaches von einander ab. Einzig die Werte für den Parameter  $\alpha$  haben das selbe Vorzeichen und eine ähnliche Größenordnung.

Ansonsten ließen sich die Werte wegen der Großen Fehler auch durch eine lineare Regression approximieren. In diesem Fall ist aber nicht klar, wie dieser linear Zusammenhang in Übereinstimmung mit den Beobachtungen und Messergebnissen in [Unterabschnitt 4.4](#) gebracht werden kann, da die magnetische Flussdichte  $B(I_{sp})$ , als auch deren Gradient  $\text{grad } B(I_{sp})$ , von der Spulenstrom  $I_{sp}$  linear abhängen.

Resümierend lässt sich zusammenfassen, dass wir keine signifikanten Probleme bei der Durchführung der Messungen hatten. Die hohe Präzession der Messgeräte führt zu guten Messergebnissen (vgl. [Tab. 7](#)) und die Ergebnisse der Auswertung der Messreihen korrelieren mit den Erwartungen aus der Theorie.

## A. Anhang

### A.1. Fehlerformeln

#### A.1.1. Mittelwert

Liegen mehrere Werte  $x_1, \dots, x_n$  einer gemessenen Größe vor, so kann die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.1})$$

genutzt werden, um diese zu mitteln.  $\bar{x}$  ist der Bestwert, für den die *quadratischen Abweichungen* minimal werden, und wird *Mittelwert* genannt.

#### A.1.2. Gewichteter Mittelwert

Liegen mehrere unabhängig Ergebnisse  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  mit den Fehlern  $\sigma_i$  vor, so berechnet sich der *gewichtete* Mittelwert  $\bar{x}$  nach der Formel

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (\text{A.2})$$

Der gesamte Fehler  $\sigma$  kann dann mit

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (\text{A.3})$$

oder

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^2}}{(n-1) \sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (\text{A.4})$$

berechnet werden. Wobei die zweite Formel bei stark verschiedenen Fehlern verwendet werden sollte.

#### A.1.3. Statistischer Fehler der Einzelmessung

Hat man  $n$  Messwerte  $x_1, \dots, x_n$  und bestimmt daraus den Mittelwert  $\bar{x}$ , so ist der mittlere quadratische Fehler  $\sigma_{\bar{x}_{stat}}$  dieses Mittelwertes

$$\sigma_{\bar{x}_{stat}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{A.5})$$

**A.1.4. Systematischer und statistischer Fehler**

Hat man einen *systematischen* Fehler  $\sigma_{syst}$  und einen *statistischen* Fehler  $\sigma_{stat}$ , so erhält man den gesamten Fehler  $\sigma_{ges}$  als quadratische Summe des systematischen und statistischen Fehlers, d.h.

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{syst}^2 + \sigma_{stat}^2}. \quad (\text{A.6})$$

**A.1.5. Gaußsche Fehlerfortpflanzung**

Für eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  mit den Fehlergrößen  $x_1, \dots, x_r$  berechnet sich der Fehler  $\sigma_f$  des Funktionswertes nach der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_i^r \left( \sigma_{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (\text{A.7})$$

## A.2. Messwerte



## Literatur

1. Demtröder, W. *Experimentalphysik 2 : Elektrizität und Optik* 6., überarb. u. akt. Aufl. 2013. ger. Online-Ressource (XVI, 482 S.), Ill., graph. Darst. ISBN: 9783642299445 | 978-3-642-29944-5.  
URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29944-5> (Springer, Berlin, 2013).
2. Meschede, D. *Gerthsen Physik* 25. Aufl. 2015. Neuauflage 2015. ger. Online-Ressource (XVI, 1052 S. 1330 Abb., 1000 Abb. in Farbe, online resource). ISBN: 9783662459775 | 978-3-662-45977-5.  
URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5> (Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2015).
3. Peter Schaaf, J. G.-K. *Lernportal der Universität Göttingen: Dia- und Paramagnetismus* (LP Uni Göttingen, 2024).  
URL: <https://www.lp.uni-goettingen.de/get/text/4205>, (Besucht am 19. Mai 2024 um 23:20).
4. Große-Knetter, J. & Schaaf, P. *Das Physikalische Praktikum Band I. Band I* (Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2023).
5. Wagner, P., Steiner, G. & Reischl, G. P. *Einführung in die Physik : inkl. Neudefinition des internationalen Einheitensystems (SI)* 4., überarbeitete Auflage. ger. 1 Online-Ressource (535 Seiten). ISBN: 9783990309896 | 978-3-99030-989-6.  
URL: <https://elibrary.utb.de/doi/book/10.24989/9783990309896> (facultas, Wien, 2020).