Anfängerpraktikum der Fakultät für Physik,
Universität Göttingen

Versuch 14
Das Mikroskop

Praktikanten: Maximilian Kurjahn
Lukas Hupe

E-Mail: ...@stud.uni-goettingen.de
...@stud.uni-goettingen.de

Betreuer: Isildur († 2 T.A.)

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Versuchsteil A **3**
2.1 Bestimmung der Gesamtvergrößerung 3
2.2 Bestimmung der Objektivvergrößerung 4
2.3 Bestimmung der Okularvergrößerung 4
2.4 Berechnung der Brennweite der Objektive 5

3 Versuchsteil B **5**
3.1 Auflösungsvermögen aus Maßstabseinteilung 6
3.2 Auflösungsvermögen aus Apertur 6
3.3 Auflösungsvermögen aus Randstrahlwinkel 7

4 Diskussion **8**
4.1 Versuchsteil A 8
4.2 Versuchsteil B 9

Literatur **10**

1 Einleitung

Das zusammengesetzte Mikroskop, entwickelt um das Jahr 1600, war eines der wichtigsten optischen Geräte für die Entwicklung der modernen Gesellschaft: Die Existenz von Mikroorganismen revolutionierte die Biologie und die Medizin, die nun endlich die Verursacher der Krankheiten und Seuchen fand und diese wirksam bekämpfen konnte.

Auch handelt es sich beim Mikroskop um ein Gerät, dass leicht zu verstehen und damit gut geeignet für eine Einführung in die geometrische Optik ist. Als solches wird es hier verwendet.

2 Versuchsteil A

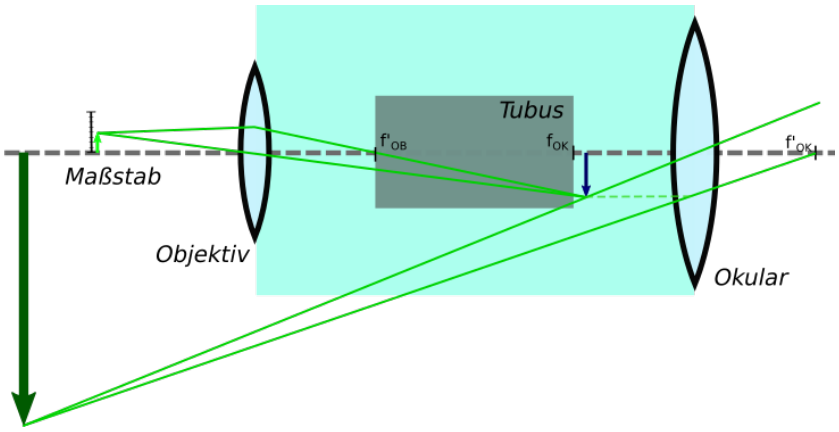

Abbildung 2.1: Schematische Abbildung des Strahlenganges im Mikroskop für Versuchsteil 1.

2.1 Bestimmung der Gesamtvergrößerung

Für den Maßstab war angegeben, dass 1 Skalenteil $m := 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$ entspricht. Für den Fehler beim Ablesen des Wertes x beim Vergleichsmaßstabes wird $\sigma_{x_1} = 1\,\mathrm{mm}$ für das Objektiv mit 10-facher Vergrößerung und $\sigma_{x_2} = 2\,\mathrm{mm}$ für das Objektiv mit 40-facher Vergrößerung angenommen. Die jeweilige Vergrößerung für jede der drei Messungen ergibt dann zu

$$V_i = \frac{x}{m \cdot k} \tag{2.1}$$

mit $i = 1, 2, 3$ für die jeweiligen Messungen und k der Anzahl der Skalenteil, die bei der Deckung mit dem Vergleichsmaßstab genommen wurden. Nun wird der Mittelwert für

die Gesamtvergrößerung V_{ges} nach

$$V_{\text{ges}} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} \tag{2.2}$$

berechnet. Auf den statistischen Fehler wird hier verzichtet, da dieser deutlich zu klein ist, die Messwerte liegen zu dicht beieinander. Stattdessen wird der Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung aus Gleichung (2.2) berechnet und mit dem Student-t-Faktor t_P für 3 Messwerte mit $t_P = 1.32$ multipliziert, so dass man für

$$\sigma_{V_{\text{ges}}} = \frac{t_P}{3}\sqrt{\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2 + \sigma_{V_3}^2} = \frac{t_P}{\sqrt{3}}\,\sigma_V \tag{2.3}$$

erhält. So ergibt sich für die 10-fache Vergrößerung $V_{\text{ges},\,10\times} = 101 \pm 2$ und für die 40-fache Vergrößerung $V_{\text{ges},\,40\times} = 421 \pm 5$.

2.2 Bestimmung der Objektivvergrößerung

Hier wird nun nochmal die gleiche Rechnung wie in Abschnitt 2.1 durchgeführt. Für den Fehler beim Ablesen des Wertes x beim Vergleichsmaßstabes wird $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 0.5\,\text{mm}$ für beide Objektive mit 10-facher und 40-facher Vergrößerung angenommen. Schließlich erhält man für die 10-fache Vergrößerung $V_{\text{Obj},\,10\times} = 10.0 \pm 0.8$ und für die 40-fache Vergrößerung $V_{\text{Obj},\,40\times} = 40 \pm 4$.

2.3 Bestimmung der Okularvergrößerung

Für die Gesamtvergrößerung gilt folgender Zusammenhang

$$V_{\text{ges}} = V_{\text{Obj}} \cdot V_{\text{Oku}}.$$

Daraus lässt sich die Okularvergrößerung berechnen, die sich dann zu

$$V_{\text{Oku}} = \frac{V_{\text{ges}}}{V_{\text{Obj}}} \tag{2.4}$$

berechnen lässt. Der Fehler ergibt sich mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{V_{\text{Oku}}} = \frac{1}{V_{\text{Obj}}}\sqrt{\sigma_{V_{\text{ges}}}^2 + \sigma_{V_{\text{Obj}}}^2\,\frac{V_{\text{ges}}^2}{V_{\text{Obj}}^2}}. \tag{2.5}$$

Die so berechneten Vergrößerungen sind zusammen mit den Daten aus Abschnitt 2.1 und 2.2 in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Als gewichteter Mittelwert erhält man dann $V_{\text{Oku}} = 10.4 \pm 0.6$ für die Okularvergrößerung.

	V_{ges}	V_{Obj}	V_{Oku}
10×	101 ± 2	10.0 ± 0.8	10.2 ± 0.8
40×	421 ± 5	40 ± 4	10.6 ± 0.9

Tabelle 2.1: Berechnete Gesamt-, Objektiv- und Okularvergrößerungen.

2.4 Berechnung der Brennweite der Objektive

Für dünne Linsen gilt mithilfe des Strahlensatzes die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

mit Brennweite f, Gegenstandsweite g und Bildweite b. Für die Vergrößerung gilt nach [2] $V = {}^{b}\!/_{g}$ und somit

$$V = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{t}{f} \tag{2.6}$$

mit der Tubuslänge t. Daraus folgt dann direkt für die Differenz der Vergrößerungen

$$\Delta V = V_{\text{lang}} - V_{\text{kurz}} = \frac{t_{\text{lang}} - t_{\text{kurz}}}{f} = \frac{\Delta t}{f}. \tag{2.7}$$

Diese lässt sich leicht nach der Brennweite f umstellen und der Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet sich zu

$$\sigma_f = \frac{1}{|\Delta V|}\sqrt{\sigma_{\Delta t}^2 + \sigma_{\Delta V}^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta V}\right)^2}, \tag{2.8}$$

mit $\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\ 0.5\,\text{mm}$ und $\sigma_{\Delta V} = \sqrt{\sigma_{V_{\text{kurz}}}^2 + \sigma_{V_{\text{kurz}}}^2}$, wobei sich die Fehler für die Vergrößerungen analog nach Abschnitt 2.1 berechnen. Daraus ergeben sich für die Brennweiten der Objektive

$$\begin{aligned} f_{10\times} &= (17 \pm 4)\,\text{mm}, \\ f_{40\times} &= (5.3 \pm 1.2)\,\text{mm}. \end{aligned}$$

3 Versuchsteil B

Bei den nachfolgenden Rechnungen wurde mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 650\,\text{nm}$ gearbeitet [2].

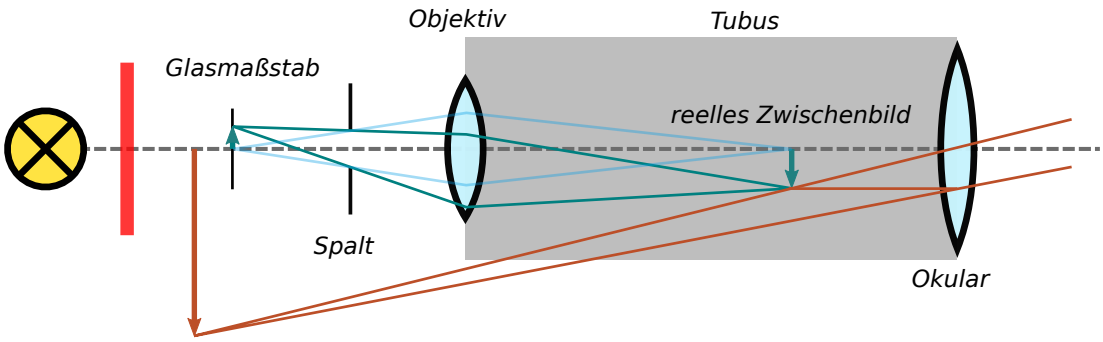

Abbildung 3.1: Schematischer Strahlengang zu Versuchsteil B, Messung 1. Der Spalt beeinträchtigt die Auflösung des Mikroskopes durch Verkleinern der Apertur

3.1 Auflösungsvermögen aus Maßstabseinteilung

Die Maßstabseinteilung des Glasmaßstabes (siehe Abbildung 3.1)) war am Versuchsort zu 0.1 mm angegeben.

Mit der Formel

$$A = \frac{1}{x_{min}}$$

erhält man eine Auflösung von $10\,000\,\mathrm{m}^{-1}$, da der Aufbau so eingestellt war, dass die Markierungen gerade nicht aufgelöst waren.

3.2 Auflösungsvermögen aus Apertur

Um die numerische Apertur N des Aufbaus zu bestimmen, muss der Öffnungswinkel bestimmt werden. Dabei gilt

$$\sin\alpha = \frac{s}{d}$$

mit s der Spaltbreite, bei der der Maßsstab gerade noch scharf aufgelöst wurde und d dem Abstand zwischen Spalt und Maßstab, der in unserem Aufbau $(55 \pm 3)\,\mathrm{mm}$. Die Spaltbreite wurde zu $(28.46 \pm 0.05)\,\mathrm{mm} - (26.26 \pm 0.05)\,\mathrm{mm} = (2.2 \pm 0.07)\,\mathrm{mm}$ bestimmt. Der Fehler der Differenz stammt aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

Für die Auflösung A erhält man also

$$\begin{aligned} A &= \frac{N}{\lambda} \\ &= \frac{sn}{d\lambda} \\ &= (6,2 \pm 0.4) \cdot 10^3\,\mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Auflösungsvermögen aus Randstrahlwinkel

Da das Mikroskop auf die Front des Plexiglasstabes fokussiert war, erreichen durch Einsetzen der Lochblende auf Höhe des Zwischenbildes nur genau diese Strahlen das Auge des Betrachters, welche genau die Mitte eben dieser Front durchdrangen (siehe Abbildung 3.2
Den Winkel des Randstrahls mit der optischen Achse kann nun trigonometrisch bestimmt werden. Da der Strahl auf der Rückseite des Plexiglasstabes den Abstand $d/2$ zur optischen Achse hat, diese aber nach Zurücklegen der Länge L des Stabes schneidet, gilt

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + L^2}} \end{aligned}$$

Mit der gegebenen Breite einer Markierung auf der Stabrückseite $d_0 = 0.5$mm und den gemessen 10±1 Markierungen erhält man ein $d = (5 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$m. Setzt man in die Formel ein, so erhält man für das Auflösungsvermögen

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_{min}} \\ &= \frac{n \cdot \sin\alpha}{\lambda} \\ &= (1.14 \pm 0.12) \cdot 10^5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

mit Fehler aus der Formel

$$\sigma_A = \frac{n}{\lambda} \cdot \left| \frac{L^2 \cdot \sigma_d}{2\left(L^2 + \frac{1}{4}\,d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

n ist dabei die Brechzahl von Plexiglas und wird in [2] zu 1.49 angegeben.

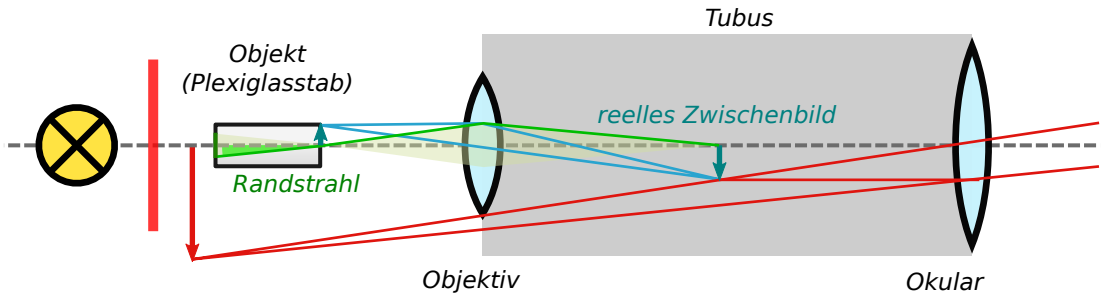

Abbildung 3.2: Schematischer Strahlengang zu Versuchsteil B Messung 2. In grün ist der in Abschnitt 3.3 behandelte Randstrahl mit dem Winkel α (ebenfalls grün) im Plexiglasstab

4 Diskussion

4.1 Versuchsteil A

Ergebnisse Für die Bestimmung zur Gesamtvergrößerung und zur Okularvergrößerung liegen keine Vergleichswerte vor. Deshalb lässt sich zur Genauigkeit des berechneten Vergrößerungen keine Aussagen machen. Die Objektivvergrößerung jedoch war direkt vom Hersteller an dem Mikroskop angegeben und wurde schließlich in der Auswertung als Index benutzt. Für die 10-fache Vergrößerung erhielt man $V_{\text{Obj}} = 10.0 \pm 0.8$ und für die 40-fache Vergrößerung $V_{\text{Obj}} = 40 \pm 4$. Diese Werte passen erstaunlich gut zum angegebenen Herstellerwert.

Zur Brennweite der Objektive liegen ebenfalls keine Vergleichsdaten vor, so dass auch hier auf eine Einordnung verzichtet werden muss. Auffällig hierbei ist jedoch der große Fehler, der auf eine ungenaue Messung schließen lässt.

Methoden Für die Bestimmung der Vergrößerungen und Brennweiten wurden zwei verschiedene Methoden benutzt. Für die Bestimmung der Gesamtvergrößerung wurde der Objektmaßstab mit dem Vergleichsmaßstab zur Deckung gebracht, indem man mit dem einen Auge durch das Mikroskop und mit dem anderen Auge vorbei geschaut hat. Die Messmethode beinhaltet eine große Ungenauigkeit, da man vor allem bei der 40-fachen Vergrößerung eine viel zu wacklige Ablesetechnik bemerkt hat. Dort war ein Sklanestrich des zur Deckung gebrachten Objektmaßstabes teilweise sogar größer als der Abstand zweier Skalenstriche beim Vergleichsmaßstab. Glücklicherweise war bei unser Versuchsgruppe ein Nicht-Brillenträger dabei, da dies nochmal zu erheblichen Beeinträchtigungen beim Ablesen geführt hätte, wie eine andere Versuchsgruppe [3], die nur

aus Brillenträgern bestand, erfahren musste.

Für die weiteren Schritte in Versuchsteil A wurde auf das Okular verzichtet und mit der Mattscheibe das reelle Zwischenbild beobachtet. Diese Messmethode war noch weitaus ungeeigneter und fehlerbehafteter als die zuvor verwendete. Zum einen musste bei der Bestimmung zur Objektivvergrößerung der Tubus mit der Mattscheibe soweit herausgezogen werden, dass sich das Bild scharf stellte. Dies war sehr wacklig, zumal auch die exakte Position, an der das Bild scharf wurde, auf der Mattscheibe nicht genau erkennbar wurde. Schließlich musste man mit einem Messschieber die Länge einer gewissen Anzahl Skalenteile vermessen. Die Mattscheibe war jedoch so klein und auch noch in den Tubus eingelassen, sodass eine vernünftige Messung kaum möglich war.

Bei der Messung zur Brennweite der beiden Objektive wurde eine ähnliche Messmethode verwendet, nur diesmal musste der Tubus nicht herausgezogen werden, um das das Bild scharf zu stellen, sondern an dem Objektivrad. Dies verbesserte die Messung an der Mattscheibe nicht merklich. Eine andere Möglichkeit, um Längen auf der Mattscheibe zu messen, wäre für den gesamten Versuchsteil wünschenswert gewesen.

Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass die Methoden, die in Versuchsteil A verwendet wurden, sich nicht besonders gut eignen, um präzise Messungen für die Vergrößerung zu bestimmen. Gerade dort kommt es sehr genau auf Messpräzession und Genauigkeit an. Umso verwunderlicher ist es, dass die bestimmten Werte für die Objektivvergrößerung so genau zu denen des Herstellers passen. Um aber die Vergrößerungen und Brennweiten auch in Zukunft reproduzierbar und zuverlässigen messen zu können, müssen die Messmethoden dahingehend erweitert werden, dass das Ablesen an der Mattscheibe sowie der Vergleich der zur Deckung gebrachten Maßstäbe genauer erfolgen kann.

4.2 Versuchsteil B

Ergebnisse In diesem Versuchsteil sollten die Auflösungen eines auf einer optischen Schiene befestigten Aufbaus auf drei unterschiedliche Methoden untersucht werden. Dabei wird die Apertur einmal mit einem Spalt verkleinert, sodass eine niedrigere Auflösung entstehen sollte. Dies ist tatsächlich so: Bei der Messung ohne Spalt (siehe Abschnitt 3.3) wurde die Auflösung gut eine Größenordnung höher gemessen. Dieser Wert passt also zum theoretischen Modell.

Allerdings ist ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden mit Spalt gemessenen Werten zu erkennen: Sie liegen um 13 σ-Umgebungen des fehlerbehafteten Wertes auseinander.
Dies liegt vermutlich daran, dass wir den Spalt nicht weit genug geschlossen haben und somit die Annahme, dass beide Werte dieselbe Auflösung beschreiben, falsch ist. Im Vergleich mit einer anderen Gruppe [3], die dieselbe Versuchsapparatur verwendete, zeigte

sich in unseren Daten eine ungefähr sechsfach größere Spaltöffnung, die die sechsfach größere Auflösung erklären würde.

Methoden Angewandt wurden hier drei verschiedene Methoden zur Bestimmung der Auflösung: Eine theoretische, basierend auf dem Abstand gerade nicht aufgelöster Punkte, sowie zwei geometrische, in denen die numerische Apertur durch Bestimmen des Öffnungswinkels α berechnet wird.
.
Der theoretische Ansatz ergibt ein sinnvolles Ergebnis, sofern denn tatsächlich der kleinste aufzulösende Abstand bestimmt wurde. Da dies bei uns anscheinend nicht der Fall war, kann keine Übereinstimmung mit den anderen Ergebnissen erwartet werden. Auch er zweite Ansatz setzt voraus, dass dass Mikroskop vor Messung der Spaltbreite den Probemaßstab gerade nicht auflöst. Hier ergeben sich also dieselben Probleme, da dieser Punkt sehr subjektiv ist und das Ergebnis stark vom Durchführenden und dessen Definition von "nicht aufgelöstäbhängt.
Der dritte Ansatz hat dieses Problem nicht: Hier muss nur ein Objekt scharf gestellt werden, was nach Erfahrung des Autors sehr viel einfach ist, als etwas gerade nicht scharfzustellen. Allerdings ist das Bestimmen des Öffnungswinkel durch Zählen der Markierungen durchaus schwierig durchzuführen, da das Bild durch die Lochblende recht unübersichtlich ist und jedes Staubkorn im Strahlengang das Zählen schwerer macht.

Literatur

[1] Dieter Meschede (Hrsg.), *Gerthsen Physik*, Springer Berlin Heidelberg, 24. Auflage, 2010

[2] Jörn Große-Knetter und Peter Schaaf, *Das Physikalische Praktikum Band II*, Universitätsverlag Göttingen, 2016

[3] Jonas Isensee, Lennart Jahn, *Versuchsprotokoll Mikroskop*, Göttingen, 2016

■