

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 6

Kapillarität und Viskosität

Praktikanten: Maximilian Kurjahn
Lukas Hupe

E-Mail: ..@stud.uni-goettingen.de
..@stud.uni-goettingen.de

Betreuer: Max Mustermann

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Oberflächenspannung	3
2.2	Steighöhe	3
2.3	Innere Reibung	4
2.4	Mohr'sche Waage	4
3	Durchführung	4
3.1	Kapillarität	4
3.2	Innere Reibung von Flüssigkeiten	5
4	Auswertung	5
4.1	Oberflächenspannungen	5
4.2	Viskosität destillierten Wassers	7
5	Diskussion	9
5.1	Oberflächenspannung	9
5.2	Viskosität destillierten Wassers	11
	Literatur	11

1 Einleitung

Wenn man ein sehr dünnes Röhrchen in Wasser hält, beobachtet man, dass dieses entgegen der Gravitation im Röhrchen aufsteigt. Dieses Phänomen bezeichnet man als Kapillarität und sie resultiert aus der Oberflächenspannung der Flüssigkeit, welche in diesem Versuch bestimmt werden soll. Eine praktische Anwendung findet sie zum Beispiel im Füllfederhalter oder bei der Wasseraufnahme von Pflanzen.

Es gibt verschiedene Honig-Sorten, die unterschiedlich schnell vom Frühstücksbrötchen herunterfließen. Diese Zähflüssigkeit wird als Viskosität bzw. innere Reibung bezeichnet und wird im folgenden Versuch von Wasser bestimmt. Da diese sehr von der Temperatur abhängt, war es zum Beispiel früher üblich, im Sommer und Winter unterschiedliche Motorenöle zu verwenden, um einen problemlosen Motorenstart zu ermöglichen.

2 Theorie

2.1 Oberflächenspannung

Die Teilchen in einem Stoff üben Kräfte untereinander aus. Dazu gehören *Dipol-Dipol-Wechselwirkungen*, die zwischen Teilchen mit dauerhaften Dipolen wirken und *Van-der-Waals-Wechselwirkungen*, die sich zwischen zeitlichen Inhomogenitäten in der Ladungsverteilung von Teilchen bilden. Im Inneren einer Flüssigkeit heben sich diese auf, am Rand jedoch nicht, sodass es in der Summe zu einer Kraft ins Innere führt. Möchte man nun die Oberfläche um dA vergrößern, so muss eine Arbeit verrichtet werden, die proportional zur Oberflächenänderung ist, der Proportionalitätsfaktor wird mit σ bezeichnet, also ergibt sich [2, S.197]

$$dW = \sigma dA. \quad (2.1)$$

2.2 Steighöhe

Wenn eine Flüssigkeit in einer Zylindersäule aufgrund der Oberflächenspannung aufsteigt, so vergrößert sich die Fläche um $2\pi r \Delta h$ und die verrichtete Arbeit ergibt sich zu

$$\Delta W = \sigma 2\pi r \Delta h = F \Delta h,$$

wobei r jeweils den Radius und Δh die Höhenänderung ist. Somit kann man eine Kraft F assoziieren, die im Gleichgewicht gleich der Gewichtskraft

$$F_G = mg = \pi r^2 \rho g \Delta h$$

ist, wobei ρ die Dichte bezeichnet. Gleichsetzen führt zu

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{r \rho g}. \quad (2.2)$$

2.3 Innere Reibung

Wenn eine Flüssigkeit durch ein Rohr der Länge l und Radius r strömt, so kommt es zur Reibung an der Rohrwand. Diese setzt sich ins Innere der Flüssigkeit fort, was zur *inneren Reibung* zwischen den Teilchen führt. So entsteht ein Druckunterschied $\Delta p = p_1 - p_2$ und nach dem Gesetz von HAGEN-POISEUILLE [2, S.124] berechnet sich der mittlere Strom I zu

$$I = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} r^4 \quad (2.3)$$

mit der *dynamischen Viskosität* η .

2.4 Mohr'sche Waage

Nach dem Prinzip von ARCHIMEDES erfährt ein Körper in Wasser Auftrieb. Bei der Mohr'schen Waage wird nun diese Kraft durch angehängte Gewichte ausgeglichen. Das Verhältnis der Kräfte F lässt sich schreiben als

$$\frac{F}{F_W} = \frac{V \varrho g}{V \varrho_W g} = \frac{\varrho}{\varrho_W} = \frac{F_G}{F_{W,G}}$$

mit den Volumina V , Dichten ϱ und Erdbeschleunigung g . So ergibt sich mit den Drehmomenten $D = g \sum_i m_i r_i$ und $D_W = g \sum_i m_{W,i} r_{W,i}$ die Dichte ϱ des gesuchten Stoffes zu

$$\varrho = \frac{D}{D_W} \varrho_W, \quad (2.4)$$

wobei der Index W jeweils für Wasser steht.

3 Durchführung

3.1 Kapillarität

In diesem Versuchsteil misst man mit drei Kapillaren unterschiedlicher Durchmesser die Steighöhe drei verschiedener Flüssigkeiten (destilliertes Wasser, Methanol und Ethylenglykol). Der Radius der Kapillaren wird dabei mit Hilfe eines Messmikroskopes je drei Mal pro Kapillare bestimmt.

Die mit einer Seifenlösung und destilliertem Wasser gereinigten Kapillaren werden in die jeweilige Flüssigkeit eingetaucht, um die Oberfläche zu benetzen, und anschließend wieder bis zum unteren Ende der aufgedruckten Skala angehoben, um die Steighöhe h relativ zur Flüssigkeitsoberfläche abzulesen. (siehe Fig. 3.1a)

Nach dem Reinigen aller drei Kapillare wird die Dichte der Flüssigkeiten mit der Mohr'schen

Waage durch Ausgleich von Auftriebs- und Gewichtskraft (siehe 2 und Fig. 3.1b) bestimmt.

Hier ist zu besonders beachten, dass die Kapillare keine Reste anderer Flüssigkeiten beinhalten, da diese das Oberflächenverhalten des Wassers verändern können. Außerdem muss die Mohr'sche Waage vor Versuchsbeginn ausbalanciert werden, da sonst die Auftriebskräfte nicht berechnet werden können.

3.2 Innere Reibung von Flüssigkeiten

Im zweiten Teil des Versuchs wird – nach erneutem Reinigen der Kapillaren – die Auslaufzeit von destilliertem Wasser durch Kapillaren mit dem in 3.1c dargestellten Aufbau gemessen. Das im zylinderförmigen Vorratsgefäß gespeicherte Wasser fließt durch die am Sockel eingespannte Kapillare aus, dabei ist die Wasserhöhe an einer aufgedruckten Skala abzulesen.

In der ersten Messreihe werden die drei Kapillare aus Versuchsteil 1 verwendet, durch die das Wasser aus dem Reservoir von einem ursprünglichen Füllstand von 50 cm. Dabei wird die Zeit gestoppt, in der der Wasserstand auf 45 cm fällt.

In der zweiten Messreihe wird derselbe Aufbau mit der dünnsten Kapillare verwendet. Dabei lässt man das komplette Wasser aus 40 cm Höhe abfließen und notiert dabei alle 20 s den aktuellen Wasserstand.

Bei diesem Versuchsteil liegt die größte Schwierigkeit im Ablesen der Wasserhöhe, da der Meniskus relativ breit ist.

4 Auswertung

4.1 Oberflächenspannungen

Die Messwerte der Durchmesser der einzelnen Kapillaren werden gemittelt und die statistischen Fehler werden nach der Fehlerformel des Mittelwertes berechnet. Daraus ergeben sich folgende Werte für die Durchmesser

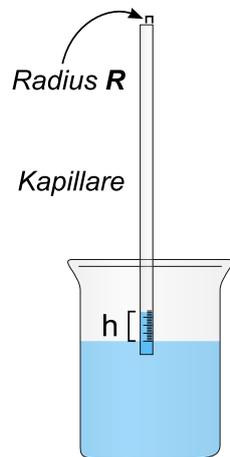
$$d_b = (1.17 \pm 0.08) \text{ mm},$$

$$d_r = (0.87 \pm 0.04) \text{ mm},$$

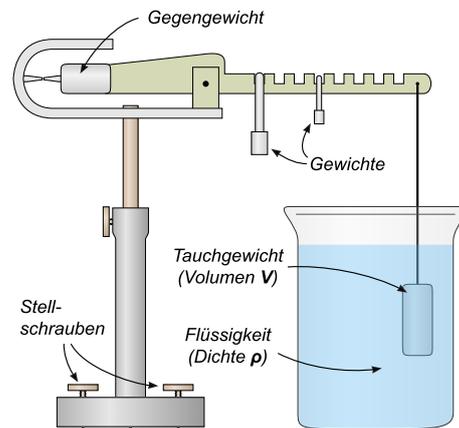
$$d_g = (1.77 \pm 0.02) \text{ mm}.$$

Die Dichten werden nach Formel (2.4) berechnet. Der Fehler berechnet sich zu

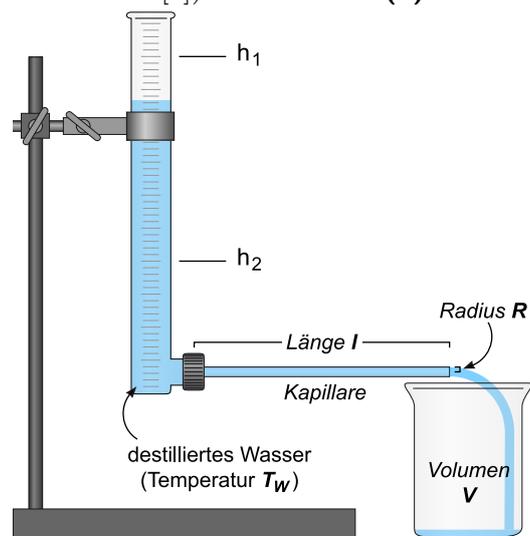
$$\sigma_e = \frac{\rho_W}{S_W} \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_{S_W}^2 \frac{S^2}{S_W^2}} \quad (4.1)$$



(a) Kapillarität (verändert nach [4])



(b) Die Mohr'sche Waage [4]



(c) Innere Reibung [4]

Abbildung 3.1: Die unterschiedlichen Versuchsaufbauten. Für 3.1a und 3.1c ist zu beachten, dass in diesem Protokoll der Kapillarradius mit r bezeichnet wird und R den Radius des Speichergefäßes bezeichnet.

mit $S := \sum_i m_i r_i$. Der Fehler für σ_Σ wird hierbei mit $5 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}$ angenommen, was einer Verschiebung des mittleren Gewichts um eine Stelle entspricht. Die Dichte von Wasser bei 23°C wird nach [3, S. 6-12] zu $\rho_W = 997.54 \text{ kg m}^{-3}$ angenommen. Die daraus errechneten Werte für die Dichten sind in Tabelle 4.1 abgebildet. Aus Gleichung (2.2) folgt, dass sich die Oberflächenspannung zu

Stoff	$\Sigma [10^{-6} \text{ kg m}]$	Dichte $\rho [\text{kg m}^{-3}]$
Wasser	495 ± 5	997.54
Methanol	450 ± 5	907 ± 14
Ethylenglykol	548 ± 5	1103 ± 16

Tabelle 4.1: Die Dichte von Wasser, Methanol und Ethylenglykol. Die Werte sind nach Gleichung (2.4) und die Fehler nach Gleichung (4.1) berechnet.

$$\sigma = \frac{1}{4} \rho g \Delta h d_i \quad (4.2)$$

und der Fehler nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_\sigma = \frac{1}{4} g \sqrt{(\sigma_\rho \Delta h d)^2 + (\sigma_{\Delta h} \rho d)^2 + (\sigma_d \rho \Delta h)^2} \quad (4.3)$$

ergibt. Die Fehler σ_ρ und σ_d sind dieselben von oben und der Fehler für die Höhe wird mit $\sigma_{\Delta h} = 0,002 \text{ m}$ angenommen, da sich die Höhe beim Herausziehen der Kapillaren öfter gewechselt hat. Daraus lassen sich die Oberflächenspannungen für jede Kapillare und jede Flüssigkeit errechnen. Anschließend wird der gewichtete Mittelwert gebildet und die Fehler lassen sich nach der Fehlerformel für den gewichteten Mittelwert errechnen. Die Werte sind in Tabelle 4.2 zu finden.

4.2 Viskosität destillierten Wassers

Durch Umstellen des HAGEN-POISEUILLE-GESETZES erhält man

$$\eta = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8 \dot{V} l} r^4,$$

wobei Δp die Druckdifferenz auf der Kapillare ist. Diese kann man nach der hydrostatischen Druckgleichung durch $\Delta p \approx \rho g \bar{h}$ annähern, wobei \bar{h} der Mittelwert von h_1 und h_2 ist. Das in der Zeit t abgelaufene Volumen V berechnet sich durch

$$V = \pi R^2 \cdot (h_1 - h_2), \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

Kapillare	Oberflächenspannung σ [J m ⁻²]		
	Wasser	Methanol	Etylenglykol
blau	0.066 ±0.005	0.032 ±0.004	0.046 ±0.005
rot	0.065 ±0.004	0.034 ±0.003	0.045 ±0.004
grün	0,059 ±0.006	0.029 ±0.029	0.043 ±0.006
Mittelwert	0.064 ±0.003	0.032 ±0.002	0.045 ±0.003

Tabelle 4.2: Die Oberflächenspannungen von Wasser, Methanol und Ethylenglykol. Die Werte und Fehler der jeweiligen drei Einzelmessungen pro Kapillare und Flüssigkeit sind nach Gleichung (4.2) und (4.3) berechnet. Daraus wurden die gewichteten Mittelwerte und Fehler jeder Kapillare berechnet und daraus wiederum die gewichteten Mittelwerte und Fehler für jede Flüssigkeit.

wobei R der Radius des Gefäßes ist. Da nur die Gesamtvolumen und Gesamtzeit bekannt sind, muss \dot{V} durch V/t angenähert werden. Damit ergibt sich für die Viskosität

$$\eta \approx \frac{\rho g t}{16 R^2 l} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} r^4$$

Den Fehler ermittelt man mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{4\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + (\sigma_{h_1} h_1)^2 + (\sigma_{h_2} h_2)^2}. \quad (4.6)$$

Dabei wurde für σ_t ein Wert von ± 200 ms angenommen; dies entspricht etwa der durchschnittlichen menschlichen Reaktionszeit. Der Fehler des Vorratsgefäßradius σ_R ist mit 1 mm zwar etwas höher als der übliche halbe Skalenteil, da hier aber die Skala schwer abzulesen war, haben wir den Fehler höher abgeschätzt. Alle anderen Fehler entsprechen dem oben erwähnten Standard.

r Kapillare [mm]	Durchflusszeit [s]	η [mPa s]
0.585±0.04	22.59±0.1	0.9±0.3
0.435±0.02	70.17±0.1	0.8±0.3
0.885±0.01	5.81±0.1	1.2±0.3
	gewichteter Mittelwert	1.0±0.2

Tabelle 4.3: Die Ergebnisse der ersten Versuchsreihe mit Auswertung. Der Fehler der einzelne Viskositäten ist nach Gleichung (4.6) berechnet.

Für den zweiten Teil der Messung muss die Viskosität mit dem Logarithmus der Füllhöhe $\ln(h)$ in Relation gebracht werden, um sie aus den in Fig. 4.1 dargestellten Messdaten

zu bestimmen. Unter Verwendung von Gleichung (4.4) erhält man mit dem HAGEN-POISEUILLE-GESETZ

$$\dot{h} = -\frac{\Delta p}{8\eta R^2 l} r^4 = -\frac{\rho g h}{8R^2 l \dot{h}} r^4$$

Das Vorzeichen entsteht, da der Volumenstrom \dot{V} positiv ist, \dot{h} aber offensichtlich negatives Vorzeichen hat. Durch logarithmisches Integrieren erhält man

$$\ln(h) = -\int \frac{dh}{h} = -\int \frac{\rho g}{8\eta R^2 l} r^4 dt = \frac{\rho g}{8\eta R^2 l} r^4 \cdot t + \mathbf{C} =: a \cdot t + \mathbf{C} \quad (4.7)$$

Mit dem in Fig. 4.1 ermittelten Wert für a ergibt sich für η ein Wert von (0.9 ± 0.2) mPa s. Der Fehler wurde wieder mit der Fehlerfortpflanzung bestimmt, wobei

$$\sigma_\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{4\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

Dabei wurden für alle auftretenden Größen dieselben Fehler wie im ersten Teil angenommen, der Fehler σ_a ist der von `gnuplot` beim χ^2 -Fitten der Messwerte angegebene.

5 Diskussion

5.1 Oberflächenspannung

In Tabelle 5.1 sind die Messwerte, Literaturwerte [3, S. 6-10/6-129] und die Abweichung angegeben in Vielfachen des Fehlers σ_σ angegeben. Wie man beobachtet, sind die Abwei-

Stoff	Messwert σ [J m ⁻²]	Literaturwert σ [J m ⁻²]	Abweichung in Vielfachen von σ_σ
Wasser	0.064 ± 0.003	0.073	4.13
Methanol	0.032 ± 0.002	0.023	5.24
Ethylenglykol	0.045 ± 0.003	0.048	1.28

Tabelle 5.1: Vergleich der Oberflächenspannungen von Wasser, Methanol und Ethylenglykol bzgl. der Mess- und Literaturwerten, sowie die prozentualen Abweichungen. Die Literaturwerte sind jeweils für 20 °C angegeben.

chungen der Messwerte von den Literaturwerten sehr unterschiedlich. Für Ethylenglykol beträgt die Abweichung noch nicht einmal $1.3 \sigma_\sigma$ und liegt sogar noch im Fehlerintervall

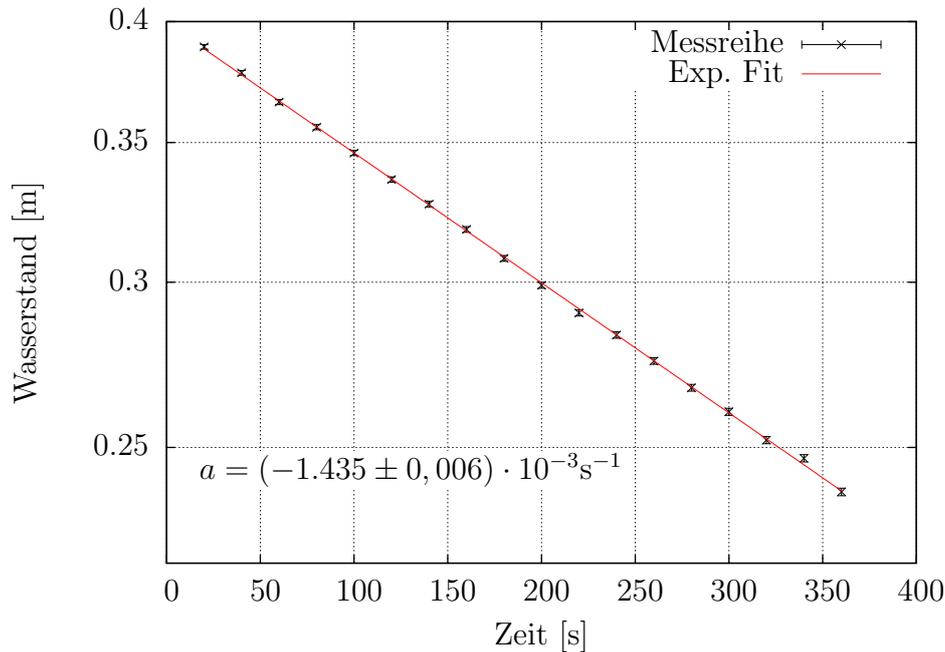


Abbildung 4.1: Halblogarithmischer Plot des gemessenen Wasserstandes aus Versuchsteil 2 über der Zeit. Der Logarithmus der Messdaten (schwarz) $\ln x/m$ wurde unter Verwendung von `gnuplot` mit der in rot aufgetragenen Geraden der Form $a \cdot t + C$ mit einem χ^2 -Fit gefittet.

der Messung. Bei Wasser und auch Methanol stellt man jedoch bereits eine höhere Abweichung fest, die auch nicht mehr im Fehlerintervall liegt und um den 5σ -Fehlerbereich liegt.

Die Messwerte von Ethylenglykol zeigen, dass sich der Versuch generell zur Bestimmung von Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten eignet, da hier die Abweichung relativ gering sind und damit ein systematischer Fehler im Versuchsaufbau ausgeschlossen werden kann. Somit muss es sich bei Methanol und Wasser um einen statistischen Fehler bei der Messung handeln, obwohl je drei Messungen zu je drei Kapillaren gemacht wurden.

Diese Fehler lassen sich unterschiedlich erklären. Zum einen könnten die Kapillaren noch von der vorherigen Messung mit destilliertem Wasser verschmutzt gewesen sein, was die Abweichung nach oben, also einen höheren Wert, erklären würde. Zum anderen könnten auch bereits Fehler bei der Dichtebestimmung mit der Mohr'schen Waage entstanden sein, da es schwierig war, die Gewichte richtig zu verteilen und die Waage ins Gleichgewicht zu bringen. Vielleicht wurde hier der Fehler als zu klein angenommen.

5.2 Viskosität destillierten Wassers

Die in diesem Versuchsteil ermittelten Werte liegen sehr nahe am Literaturwert von 1,002 mPas bei 20 °C [3, S. 6-10] sind allerdings mit nur einer Nachkommastelle relativ ungenau. Bei der gemessenen Wassertemperatur von (23 ± 1) °C erscheint der gemessene Wert zu niedrig, da die Viskosität mit zunehmender Temperatur stark fällt*. Allerdings liegt nach [5] die Viskosität von Wasser bei 23 °C mit $\eta = 0.932$ mPas noch eindeutig innerhalb der Fehlergrenzen.

Allgemein scheint der Versuch auch zur Bestimmung der Viskosität gut geeignet, jedoch mangelt es an Genauigkeit. In der ersten Messung lässt sich dies womöglich durch die Abschätzung $\dot{V} = V/t$ erklären, die bei dem in der zweiten Messung festgestellten exponentiellen Abfall offensichtlich nicht gelten.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik I – Mechanik und Wärme*, Springer Verlag, 7. Auflage, 2015
- [2] Dieter Meschede (Hrsg.), *Gerthsen Physik*, Springer Berlin Heidelberg, 24. Auflage, 2010
- [3] Chemical Rubber Company (Hrsg.), *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Band 73, 1992
- [4] <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3638>, zuletzt abgerufen am 25.05.2016
- [5] <http://www.viscopedia.com/viscosity-tables/substances/water/>, zuletzt abgerufen am 25.05.2016



*zum Beispiel hat destilliertes Wasser bei 30 °C bereits 0.7977 mPas [3, S. 6-10]