

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

**Versuch 17**  
**Fresnelsche Formeln**

---

Praktikant: Lukas Hupe  
Mitarbeiter: Maximilian Kurjahn  
Durchgeführt am 12.01.2017

E-Mail: ...@stud.uni-goettingen.de

Betreuer: Donald Trump

Zensur:

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Fresnelsche Formeln . . . . .	3
2.2	Der Brewster-Winkel . . . . .	4
2.3	Drehung der Schwingungsebene . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Aufbau . . . . .	5
3.2	Justierung des Aufbaus . . . . .	6
3.3	Messung . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Intensität . . . . .	7
4.2	Polarisationsdrehung . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
5.1	Güte der Messung . . . . .	10
5.2	Probleme bei der Durchführung . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

---

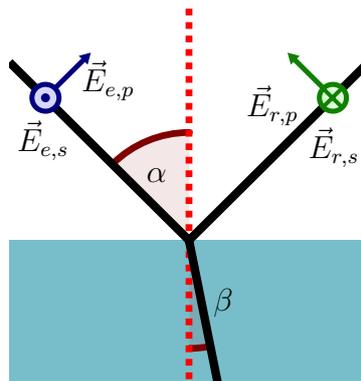
# 1 Einleitung

Trifft eine Lichtwelle auf eine Grenzfläche, so wird ein Anteil des Lichtes in das neue Medium durchgelassen, Teile werden aber auch reflektiert. Genaue Messungen ergeben sogar, dass diese Anteile von der Polarisation des Lichts abhängen. Dadurch eröffnen sich Möglichkeiten, einfach Polarisationsfilter zu konstruieren. Vor der Erfindung der Folienpolarisatoren Anfang des 20. Jahrhunderts war dies eine der gängigeren Lösungen dieses Problems.

Mathematisch kann das Grenzflächenverhalten von Licht durch die *Fresnelschen Formeln* beschreiben, die hier durch Reflektion eines Laserstrahles an einem Flintglasprisma untersucht werden sollen.

## 2 Theorie

### 2.1 Fresnelsche Formeln



**Abbildung 2.1:** Skizze zum Verhalten ebener Wellen an einer Grenzschicht.

Untersucht wird das Verhalten ebener Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ( $\mu \approx 1$ ) mit den Brechungsindices  $n_1$  und  $n_2$ . Die einfallende Welle, beschrieben durch das elektrische Feld  $\vec{E}_e$ , trifft unter einem Winkel  $\alpha$  zum Lot auf die Grenzfläche. Ein Anteil  $\vec{E}_r$  wird reflektiert, ein anderer unter dem Winkel  $\beta$  nach Snelliusschem Brechungsgesetz transmittiert. Diese elektrischen Felder werden in ihren Anteile senkrecht und parallel zur Einfallsebene aufgeteilt, die jeweils als *s*- oder *p*-polarisiert bezeichnet werden (vgl. Abbildung 2.1).

Mit den aus den *Maxwell-Gleichungen* folgenden Stetigkeitsbedingungen für elektrisches und magnetisches Feld erhält man nun die Verhältnisse zwischen den Amplituden der

einfallenden und der reflektierten Welle (vgl. [Zinth, S.34f.]).

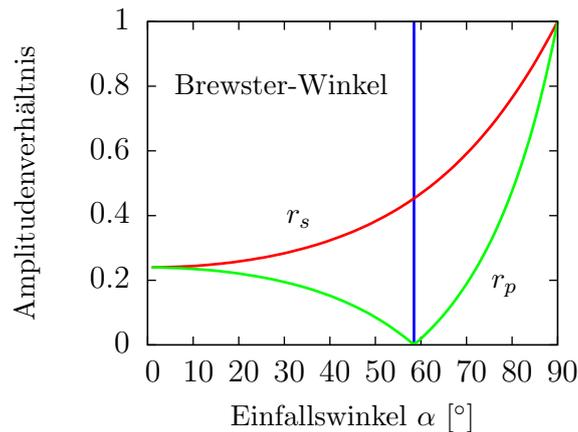
$$\begin{aligned} r_p &= \frac{E_{r,p}}{E_{e,p}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \\ r_s &= \frac{E_{r,s}}{E_{e,s}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dies sind die *Fresnelschen Formel* für reflektiertes Licht. Die  $r_p$  und  $r_s$  werden als Reflexionskoeffizienten bezeichnet und sind in 2.2 über dem Einfallswinkel aufgetragen.

Da sich die messbare Lichtintensität nach [Zinth, S.11] zu

$$I = \varepsilon_0 n c \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

berechnet, also proportional zum zeitlichen Mittel von  $|E|^2$  ist, wird in diesem Versuch immer mit dem Quadrat der Reflexionskoeffizienten, den Reflexionsgraden, gearbeitet.

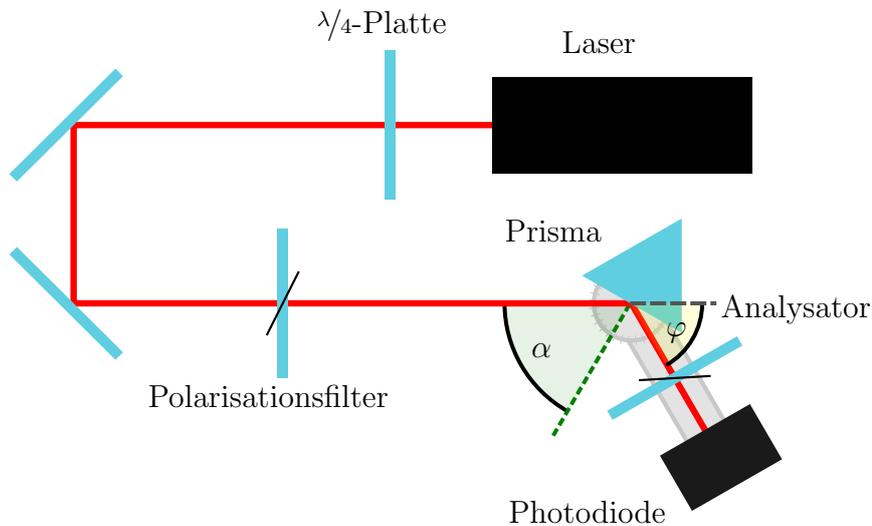


**Abbildung 2.2:** Die Reflexionskoeffizienten für den Übergang Luft-Flintglas ( $n = 1.63$ ) aufgetragen über den Einfallswinkel  $\alpha$ . In blau eingetragen ist der Brewster-Winkel  $\theta_B$

## 2.2 Der Brewster-Winkel

Wie aus Abbildung 2.2 ersichtlich ist, wird der Reflexionskoeffizient für p-polarisiertes Licht bei einem bestimmten Einfallswinkel null. Dieser Winkel wird als *Brewster-Winkel* bezeichnet und lässt sich aus Gleichung (2.1) bestimmen zu

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.2)$$



**Abbildung 3.1:** Skizze des Versuchsaufbaus, eigene Arbeit

## 2.3 Drehung der Schwingungsebene

Durch die unterschiedlichen Reflektivitäten wird die Polarisationssebene einfallenden Lichts bei der Reflexion gedreht. Betrachtet man einfallendes Licht, das zu gleichen Teilen aus s- und p-polarisierten Wellen besteht, kann man den Polarisationswinkel  $\xi$  des reflektierten Lichts schreiben als

$$\xi = 45^\circ + \gamma$$

$\gamma$  beschreibt also die Drehung der Ebene. Mit den Fresnelschen Formeln (2.1) erhält man jetzt durch Zerlegung des reflektierten Strahls in seine Komponenten (vgl. [Dem2, S.238])

$$\tan(\gamma + 45^\circ) = \frac{r_s}{r_p} = -\frac{\cos \alpha - \beta}{\cos \alpha + \beta} \quad (2.3)$$

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

Gearbeitet wird im Versuch mit einem Helium-Neon-Laser, der Licht mit einer Wellenlänge von 632.8 nm erzeugt. Diese wird mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen zirkular polarisiert, um für alle Polarisierungsrichtungen eine möglichst gleiche Intensität zu erzeugen. Das Licht passiert anschließend einen Polarisationsfilter (siehe Abbildung 3.1) und trifft dann auf die zu untersuchende Grenzfläche, hier ein Flintglasprisma mit Brechungsindex  $n = 1.63$ . Dieses befindet sich auf einem drehbaren Teller, hinter dem sich auf

---

einem schwenkbaren Arm wiederum ein Analysatorfilter und eine Photodiode befinden. Die Photodiodenspannung wird von einem über einen Verstärker angeschlossenen Multimeter gemessen.

Sowohl der Laser als auch der Verstärker müssen zunächst Betriebstemperatur erreichen, müssen also bereits vor Versuchsbeginn eingeschaltet werden.

### 3.2 Justierung des Aufbaus

Zunächst wird der Verstärker auf die in [Prkt, S.50] angegebenen Parameter eingestellt und genullt. Das Multimeter wird am Verstärkerausgang angeschlossen. Nun wird der Strahlengang justiert: Dafür muss nach Entfernen des Analysatorfilters und des Prismas der Schwenkarm mit der Photodiode parallel zur optischen Achse ausgerichtet werden, dann werden die Spiegel so ausgerichtet, dass der Laserstrahl mittig auf die Photodiode trifft und den Prismmentisch zentriert passiert. Nun wird der Polarisator auf die Zeigerpositionen  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $90^\circ$  eingestellt und die Verstärkung so angepasst, dass die gemessene Spannung für alle drei Zeigerpositionen unter 10 V liegt.

Als Referenzmessung werden zuletzt die Spannungen für  $0^\circ$  und  $90^\circ$  notiert.

### 3.3 Messung

Das Prisma muss auf dem Prismmenteller platziert werden, sodass der Laser es auf der Mitte einer Seite trifft (vergleiche Abbildung 3.1). Der Polarisationsfilter wird auf  $0^\circ$  eingestellt. Nun wird der Prismmenteller gedreht, sodass der reflektierte Strahl mittig auf die Photodiode trifft. Die Ausgangsspannung wird abgelesen und notiert. Dies wird für eine Polarisatoreinstellung von  $90^\circ$  wiederholt.

Schließlich wird der Analysatorfilter zwischen Prisma und Photodiode angebracht und so ausgerichtet, dass die gemessene Spannung minimal wird. Dieser Winkel ist zu notieren.

Die gesamte Messung ist für Schwenkarmausrichtungen  $\varphi$  von  $10 - 150^\circ$  in Schritten von  $5^\circ$  zu wiederholen.

Zu beachten ist neben der bereits erwähnten Aufwärmzeit von Laser und Verstärker auch, dass die Polarisationsfilter nicht vollständig symmetrisch sind. Daher ist der Zeigerwinkel immer in die selbe Richtung einzustellen.

---

## 4 Auswertung

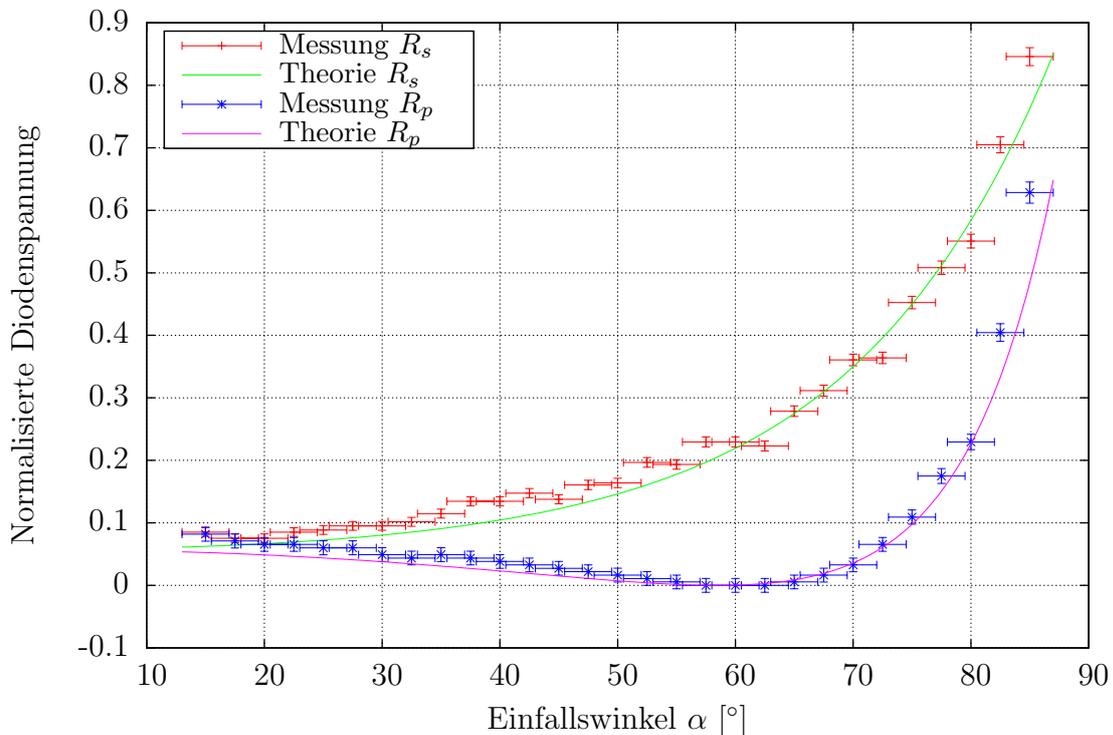
Der im folgenden verwendete Einfallswinkel  $\alpha$  berechnet sich aus dem gemessenen Armwinkel  $\varphi$  aus geometrischer Anschauung (siehe Abb. 3.1) über

$$\alpha = \frac{180^\circ - \varphi}{2}.$$

Die Fehler des Einfallswinkels ist also die (aufgerundete) Hälfte des Fehlers des Armwinkels  $\varphi$ , welcher mit einem halben Skalenteil (=  $2.5^\circ$ ) abgeschätzt wurde. Damit ist

$$\sigma_\alpha = 2^\circ$$

### 4.1 Intensität



**Abbildung 4.1:** Aufgetragen sind die durch die Referenzwerte normalisierten Diodenspannungen über dem Einfallswinkel sowie die Theoriekurven für  $n=1.63$ .

Während der Messung fiel auf, dass an der unbeleuchtete Diode eine Spannung von  $-0.05$  V am Voltmeter abzulesen war, vermutlich da der Verstärker nicht richtig kalibriert war. Diesen Wert wurde vor der Auswertung von den Messdaten abgezogen. Normalisiert durch die jeweiligen Referenzmesswerte sind die Diodenspannungen in Abbildung 4.1

über dem Einfallswinkel  $\alpha$  aufgetragen. Den Fehler der normalisierten Spannung erhält man aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{(U_{\text{ref}}\sigma_i)^2 + (U_i\sigma_{\text{ref}})^2}{U_{\text{ref}}^4}}$$

mit der Referenzspannung  $U_{\text{ref}}$  und dem jeweiligen Messwert  $U_i$ . Die Fehler  $\sigma_i$  des Messwerts und  $\sigma_{\text{ref}}$  der Referenzspannung sind auf dem Messgerät zu 0.5% vom Messwert  $+2D$  (hier 0.02 V) angegeben.

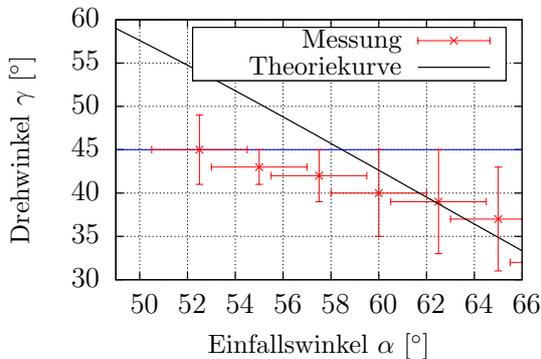
Der Brewster-Winkel  $\theta_B$  ist der Winkel, an dem der p-polarisierte Strahl vollständig transmittiert wird, die gemessene Diodenspannung also null wird. Dies war der Fall für die Einfallswinkel  $\alpha = 62.5^\circ, 60^\circ, 57.5^\circ$ . Da alle diese Werte mit dem selben Fehler behaftet sind, ist die bestmögliche Angabe für  $\theta_B = (60 \pm 3)^\circ$ , also der Mittelwert mit Fehler aus der Intervallbreite. Nach der oben diskutierten Formel (2.2) entspricht dies einem Brechungsindex von

$$n = \tan \theta_B = 1.8 \pm 0.3$$

mit Fehler aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\theta}{\cos^2 \theta_B}.$$

## 4.2 Polarisationsdrehung

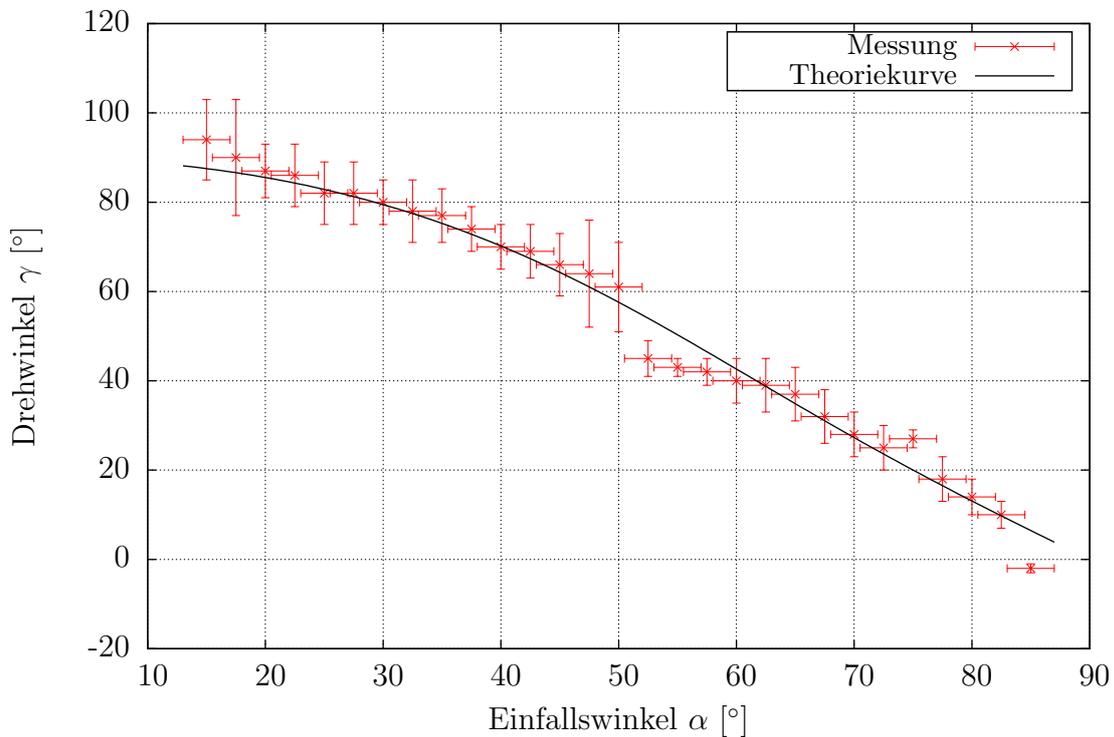


**Abbildung 4.2:** Ausschnitt aus der Abbildung 4.3

modulo  $180^\circ$  bestimmt werden kann. Außerdem beschreiben die Messdaten nicht den Winkel  $\xi$  (wie oben definiert), sondern genau den Winkel, bei dem das reflektierte Licht vollständig ausgelöscht wird, also  $\xi - 90^\circ$ . Ebenso ist zu beachten, dass wir beim Versuch die Skala falsch herum gewählt haben.

Um der in Abschnitt 2.3 geforderten Annahme, dass das einfallende Licht gleichmäßig s- und p-polarisiert sei, zu genügen, wurde der Polarisator vor dem Prisma auf einen Winkel von  $45^\circ$  eingestellt. Also kann Formel (2.3) zur Berechnung des Erwartungswertes verwendet werden. Dieser ist zusammen mit den Messwerten in Abbildung 4.3 über dem Einfallswinkel aufgetragen.

Dabei wurden aus Übersichtsgründen die negativen Funktionswerte um  $180^\circ$  erhöht. Dies ist unbedenklich möglich, da mit einem Folienpolarisator – wie im Versuch verwendet – der Polarisationswinkel nur



**Abbildung 4.3:** Aufgetragen sind die gemessenen Polarisations Ebenendrehungen  $\gamma$  sowie die Theoriekurve für  $n = 1.63$ .

Am Brewster-Winkel  $\theta_B$  ist nach Theorie die Winkeldrehung genau  $\gamma = 45^\circ$ . Diesen Wert nimmt  $\gamma$  in den Messdaten an bei

$$\theta_B = 52.5^\circ.$$

Die Abschätzung des Fehlers gestaltete sich hier schwierig, da die Fehlerintervalle der Messwerte für  $\alpha = 55 \dots 62.5^\circ$  genau bis  $45^\circ$  reichen (siehe Abbildung 4.2), aber der Fehler lässt sich einschränken durch

$$\sigma_B \leq 10^\circ.$$

Diese Problematik und Teile ihrer Ursachen werden in Abschnitt 5 weiter diskutiert.

Aus diesem Brewster-Winkel erhält man mit den oben bereits verwendeten Formeln einen Brechungsindex von

$$n = 1.3 \pm 0.5.$$

---

	Brechungsindex
Theoriewert [Prkt]	1.63
Reflexionsgrad	$1.8 \pm 0.3$
Polarisationsdrehung	$1.3 \pm 0.5$

**Tabelle 5.1:** Im Versuch bestimmte Brechungsindices mit Fehlerangabe

## 5 Diskussion

### 5.1 Güte der Messung

**Reflektionsgrad** Vergleicht man die gemessenen Werte mit den eingezeichneten Theoriekurven, fällt sofort auf, dass die meisten Datenpunkte oberhalb der Theoriekurve liegen sind. Dies deutet auf einen systematischen Fehler in der Messung hin – bei einer gewöhnlichen statistischen Verteilung wären auch Ausreißer nach unten erwartet. Ein Fehler, wie er hier zu finden ist, könnte zum Beispiel durch falsche Kalibrierung des Verstärkers entstehen. Allerdings ist auffällig, dass bei der Messungen für parallel polarisiertes Licht die Abweichung vom Erwartungswert genau um den Brewster-Winkel  $\theta_B$  minimal wird – beträgt sie z.B für  $\alpha = 15^\circ$  um  $3\sigma$ , ist sie im Bereich zwischen  $60$  und  $70^\circ$  meist innerhalb der  $1\sigma$ -Umgebung des Messwerts. Dies könnte unter anderem daran liegen, dass die Referenzwerte nicht korrekt bestimmt wurden (z.B. dass der Versuchsaufbau noch nicht richtig aufgewärmt war).

Ansonsten passen die Messergebnisse aber zur Theorie: Die Herstellerangabe für den Brechungsindex liegt im  $1\sigma$ -Intervall des bestimmten Wertes und die Theoriekurven liegen selten außerhalb der  $3\sigma$ -Intervalle der Messpunkte. Der Erfahrung des Autors nach ist dies für einen Praktikumsversuch zum Thema Optik ein durchaus akzeptables Ergebnis.

**Drehwinkel** Auch hier liegt der Theoriewert für den Brechungsindex 5.1 innerhalb der  $1\sigma$ -Umgebung der Herstellerangabe. Allerdings ist hier nicht nur der relative Fehler deutlich größer als oben, sondern auch die Abweichung von Messergebnis und Literaturwert. Dies liegt an der in Abschnitt 3 bereits angesprochen Problematik des Bestimmens eines Wertes. Eine Möglichkeit zum Erhalten eines besseren Ergebnisses wäre lineare Regression durch die um  $\theta_B$  liegenden Wertepaare, gewichtet mit ihren jeweiligen Abweichungen. Da aber bekannt war, dass die Messdaten zwischen  $\alpha = 50 \dots 75^\circ$  durch einen Fehler bei der Durchführung beeinträchtigt waren, wurde auf die gröbere Methode zurückgegriffen, um nicht mit einem zu kleinen Fehlerintervall eine hohe Sicherheit des Wertes vorzutäuschen.

### 5.2 Probleme bei der Durchführung

**Messung des Drehwinkels** Aufgrund eines Missverständnisses kam es bei der Messung des Drehwinkels zu einem Fehler, der die Messwerte für  $\alpha > 50^\circ$  erheblich verfälschte.

---

Da wir (wie bereits in Abschnitt 3 erwähnt) die Fehler durch Ausnutzen des „Totganges“ der Photodiode bestimmten, mussten immer zwei Werte pro Armwinkel gemessen werden. Dabei haben wir zunächst immer nur bis zum Skalenende bei  $90^\circ$  bzw.  $\gamma = 45^\circ$  gemessen. Dies führte dazu, dass für das oben erwähnte Intervall zwischen  $\alpha = 50 \dots 75^\circ$  die Messwerte erheblich niedriger als erwartet ausfallen.

Eine Ursache für die falsche Messung könnte ein Missverständnis eines Absatzes aus [Prkt] sein, den wir bei der Messung so deuteten, dass die Polarisatoren nur auf einer Seite der Skala abzulesen seien. Die Auswirkungen des Fehlers sind uns erst nach Abschluss der Messung aufgefallen, sodass wir die entsprechenden Werte nicht neu aufnehmen konnten. Dadurch ist – wie zu erwarten – der aus den Winkelmessungen bestimmte Brechungsindex deutlich kleiner als der Literaturwert.

## Literatur

[Prkt] Jörn Große-Knetter, Peter Schaaf, *Das Physikalische Praktikum 2016/2017 – Band II*, Universitätsverlag Göttingen, 2016

[Dem2] Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik II – Elektrizität und Optik*, Springer Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2013

[Zinth] Wolfgang Zinth, Ursula Zinth, *Optik: Lichtstrahlen–Wellen–Photonen*, De Gruyter Oldenbourg, 4. Auflage, 2013

