Grundpraktikum der Fakultät für Physik,
Universität Göttingen

Versuch 1
Das Trägheitsmoment

Praktikanten:	Jonas Isensee, Lennart Jahn
E-Mail:	jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de
	l.jahn@stud.uni-goettingen.de
Betreuer:	Til Schweiger

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theorie **3**
2.1 Trägheitsmoment 3
2.2 Das physikalische Pendel 4

3 Durchführung **4**
3.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen 5
3.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung 6

4 Auswertung **7**
4.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen 7
4.1.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße 7
4.1.2 Trägheitsmomente der Körper 8
4.1.3 Trägheitsellipse der Tischchens 9
4.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung 10
4.2.1 Beschleunigung durch Gewichte 10
4.2.2 Trägheitsmoment aus Pendelschwingung 11

5 Diskussion **12**
5.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen 12
5.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung 13

Literatur **13**

1 Einleitung

In diesem Versuch werden zwei Experimente zur Bestimmung des Trägheitsmoments J gemacht. Dieses tritt in Rotationsbewegungen auf und verhält sich wie die "Träge Masse"bei Translationsbewegungen.

2 Theorie

2.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment verhält sich für Rotationsbewegungen analog zur trägen Masse bei Translationsbewegungen. Hierbei ist der Abstand eines Massenteiles zur Rotationsachse entscheidend. Die Formel zur Berechnung des Trägheitsmoments für beliebige Körper mit konstanter Massenverteilung und beliebiger Rotationsachse ist:

$$J = \sum \mathrm{d}m_i r_i^{\perp 2} = \int r^{\perp 2} \rho \mathrm{dV} \tag{1}$$

mit $r_i^{\perp 2}$ dem Abstand des Massenteils $\mathrm{d}m_i$ zur Rotationsachse. Die Abstandsquadrate $r_i^{\perp 2}$ und folglich auch J werden für Rotationen um den Schwerpunkt minimal. Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse A_s durch den Schwerpunkt, so kann man das Trägheitsmoment zu jeder parallelen Achse A mithilfe des steinerschen Satzes berechnen:

$$J_A = J_{A_S} + M\vec{a}^2 \tag{2}$$

wobei $\vec{a}$ dem Verschiebungsvektor zwischen A und A_s entspricht.
Für die Körper, die im folgenden Experiment verwendet werden, sind die Trägheitsmomente Allgemein in Abhängigkeit ihrer Maße und Masse in Tabelle 1 angegeben. Hierbei steht M für die Masse, R für den Radius und S für die Kantenlänge des Würfels.

Alternativ lässt sich das Trägheitsmoment auch empirisch mithilfe von Torsionsschwingungen bestimmen. Dafür wird der Körper auf eine Drehscheibe mit einer Schneckenfeder gesetzt. Diese wird um den Winkel φ ausgelenkt und losgelassen. Die Feder hat die Winkelrichtgröße D_R, welche mit

$$-D_R\varphi = D \tag{3}$$

das Rücktreibende Drehmoment beschreibt. Wird die Periode T der Schwingung gemessen, lässt sich das Trägheitsmoment nach folgender Gleichung berechnen:

$$J = \frac{T^2 D_R}{4\pi^2} \tag{4}$$

Formeln aus [1] S. 132-138.

Zylinder	$\frac{1}{2}MR^2$
Hohlzylinder	MR^2
Hantelkörper	MR^2
Scheibe	$\frac{1}{2}MR^2$
Würfel	$\frac{1}{6}MS^2$
Würfel auf der Ecke	$\frac{1}{6}MS^2$
Stab	$\frac{1}{12}MR^2$
Stab am Endpunkt	$\frac{1}{3}MR^2$

Tabelle 1: Trägheitsmomente einiger Körper

2.2 Das physikalische Pendel

Ist ein starrer Körper um eine Achse mit Abstand l zu seinem Schwerpunkt drehbar gelagert, bildet er ein physikalisches Pendel. Wird er aus seiner Ruhelage ausgelenkt, beginnt er, durch die Schwerkraft als Rückstellkraft, zu schwingen. Für kleine Auslenkungen φ, in denen die Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) = \varphi$ gilt (bis ungefähr 10°), kann seine Bewegungsgleichung bei Masse m und Trägheitsmoment J beschrieben werden als

$$J\ddot{\varphi} = -lmg\varphi \tag{5}$$

Daraus ergibt sich nach [2] S.86-87 eine Schwingungsdauer,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{lmg}} \tag{6}$$

über die sich das Trägheitsmoment bestimmen lässt als:

$$J = \frac{T^2 lmg}{4\pi^2} \tag{7}$$

3 Durchführung

Der Versuch gliedert sich in zwei große Teile. In Teil A werden die Schwingungsdauern einer Drehschwingung für verschiedenste Körper gemessen, um darüber ihr Trägheitsmoment zu bestimmen. In Teil B wird ein Rad erst durch verschiedene Drehmomente beschleunigt und dann durch ein Zusatzgewicht in ein physikalisches Pendel umgewandelt. Mittels der hierbei auftretenden gleichförmigen Beschleunigungen bzw. der Schwingungsdauer des Pendels wird das Trägheitsmoment des Rades bestimmt.

3.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen

Der Aufbau besteht aus einer Spiralfeder, die so in ein Gestell eingespannt ist, dass sie eine drehbare Achse mit dem Rahmen koppelt. Um das Trägheitsmoment der verschiedenen Körper bestimmen zu können, müssen diese erst vermessen werden. Es handelt sich um einen Zylinder, einen Hohlzylinder, eine Scheibe, einen Stab, einen Hantelkörper, einen tischchenförmigen Körper und einen Würfel. Für jeden Körper bestimmt man die Masse und alle anderen wichtigen Eigenschaften wie Umfang, Radius, (Kanten)Länge, Dicke (Hohlzylinder). Gewogen wird mit einer Balkenwaage, alle Längen werden mit dem Lineal gemessen, bei runden Oberflächen wird ein Seil darumgelegt und anschließend dieses mit dem Lineal vermessen.
Anschließend wird die Winkelrichtgröße D der Feder (eine Art Federkonstante) bestimmt. Dazu werden durch eine Scheibe, an die über eine Schnur Gewichte angehängt werden, verschiedene Drehmomente auf die für diese Messung um 90° gekippte Feder ausgeübt.
Es wird dann der Auslenkwinkel in Abhängigkeit vom angehängten Gewicht vermessen.

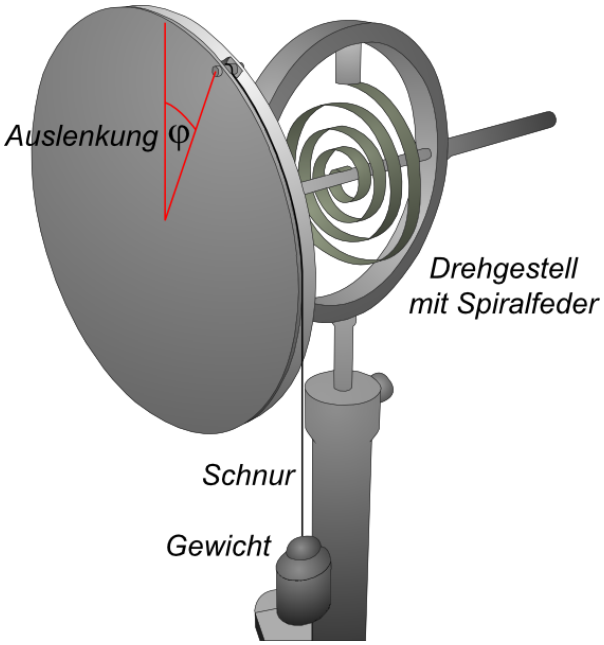

Abbildung 1: Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messung wird sowohl nach rechts als auch nach links durchgeführt, da die Feder nicht linear in beide Richtungen die gleiche Winkelrichtgröße besitzt. Für die Auswertung wird dann ein Mittelwert über alle gemessenen Winkelrichtgrößen als Näherung verwendet.
Dann wird die Feder wieder in horizontale Lage gebracht und jeder Körper wird einzeln auf der Achse montiert und in Schwingung versetzt. Die Schwingungsdauer wird über 10

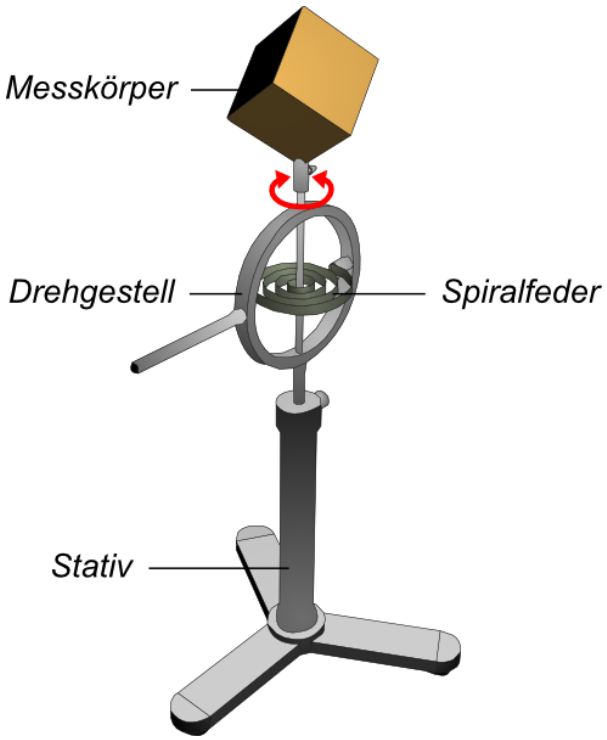

Abbildung 2: Messung der Drehschwingung

Schwingungen gemittelt gemessen. So wird die Messungenauigkeit durch Reaktionszeit etc. deutlich verkleinert. Die Messung wird für jeden Körper dreimal wiederholt.
Der tischchenförmige Körper wird gesondert vermessen. Er wird in 15° Schritten um eine zusätzliche Achse gedreht. Dabei verändert sich sein Trägheitsmoment. Für jeden Winkel wird die Schwingungsdauer bestimmt. Die resultierende Abhängigkeit Trägheitsmoment $\widehat{=}$ Winkel bildet eine Trägheitsellipse, die zweidimensionale Form des Trägheitsellipsoids.

3.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

Der Aufbau besteht aus einem Rad, an das ein zweites, kleineres 'Antriebsrad' seitlich montiert ist. die Achse des Rades liegt horizontal. Auf das kleinere Rad wird nun eine Schnur aufgerollt. Am Ende dieser Schnur werden nacheinander vier verschiedene Gewichte (0,1 kg, 0,2 kg, 0,5 kg und 1 kg) befestigt, die das Rad nach dem Loslassen des Gewichtes gleichförmig beschleunigen. Auf dem Rad ist ein Papierstreifen befestigt, auf dem, mittels eines Markengebers, im Abstand von 0,25 s Markierungen angebracht werden. Während das Rad also beschleunigt wird, wird seine Position relativ zum unbewegten Markengeber aufgezeichnet. Nach jeder Messung wird der Markengeber leicht Verschoben, um zwischen den einzelnen Messungen unterscheiden zu können. Aus den aufgenommenen Abständen auf dem Papier lässt sich dann die Winkelbeschleunigung

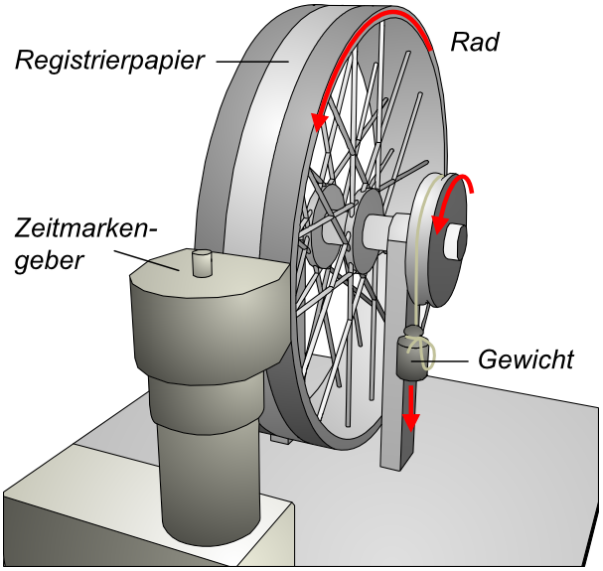

Abbildung 3: Teil B: Trägheitsmoment des Rades

und somit auch das Trägheitsmoment berechnen.

Abschließend wird das Trägheitsmoment noch über das Physikalische Pendel bestimmt. Dazu wird ein Zusatzgewicht außen an einer Speiche befestigt. wodurch sich das Rad nun wie ein physikalisches Pendel verhält. Es werden alle wichtigen Größen wie Masse des Zusatzgewichtes, Abstand von der Drehachse, Radius des Rades und Radius des kleinen Rades (für ersten Versuch) gemessen. Dann wird das Pendel in Schwingung versetzt und dreimal, über je zehn Schwingungen, die Schwingungsdauer bestimmt. Weil das Rad vielleicht nicht perfekt rund ist, wird, zur Erhöhung der Genauigkeit, die Messung mit dem Zusatzgewicht auf der gegenüberliegenden Seite des Rades wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen

4.1.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

In diesem Graphen sind die gemessen Werte für die Auslenkung in Abhängigkeit vom angreifenden Drehmoment dargestellt. Die Winkelrichtgröße entspricht der Steigung des Graphen. Da die Werte für Auslenkungen nach rechts oder links sich, wie im Graphen leicht zu sehen, stark unterscheiden, haben wir den Mittelwert $D = (106 \pm 2) * 10^{-4}\,\mathrm{Nm}$ zur Berechnung verwendet.

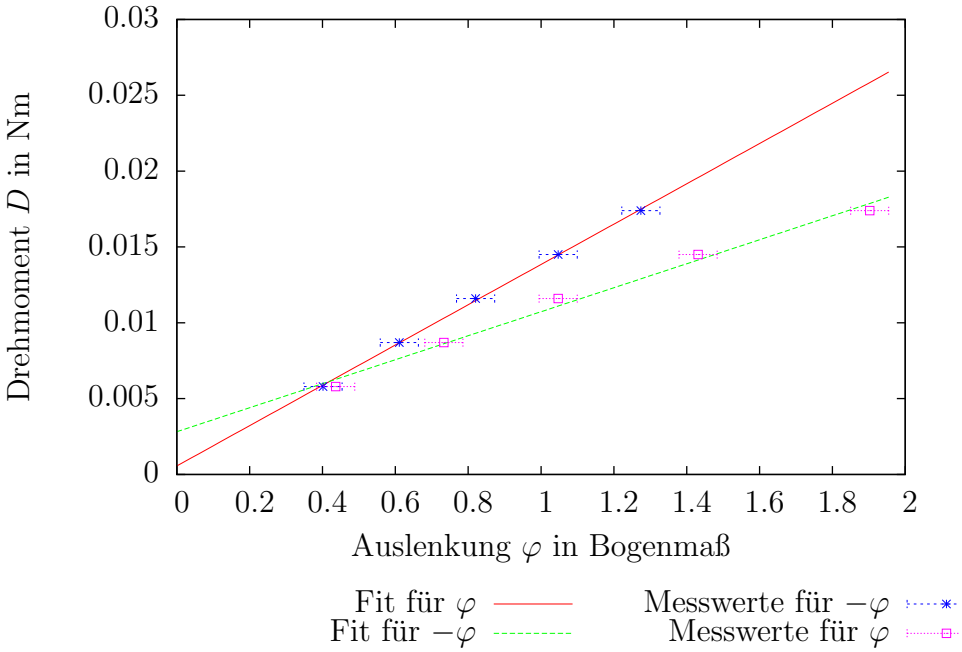

Abbildung 4: Winkelrichtgröße

4.1.2 Trägheitsmomente der Körper

Die Trägheitsmomente der Körper werden über die mittlere Schwingungsdauer T und die Winkelrichtgröße D bestimmt als

$$J = \frac{DT^2}{4\pi^2}. \tag{8}$$

Wir schätzen unseren Fehler beim Stoppen auf 0,2 s in zehn Schwingungen, was für die einzelnen Schwingungen noch 0,02 s Fehler ergibt. Der Fehler der Winkelrichtgröße wurde oben bestimmt. Für den Fehler des Trägheitsmoments ergibt sich mit Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_J^2 = \sigma_D^2 \left(\frac{\partial J}{\partial D}\right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)^2 = \sigma_D^2 \left(\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{DT}{2\pi^2}\right)^2 \tag{9}$$

In Tabelle 2 sind die aus den Schwingungsdauern berechnete Werte mit Fehler dargestellt.
Die über die Literaturformeln berechneten Werte und die prozentualen Abweichungen zu den über die Drehschwingung bestimmten Werten sind in Tabelle 3 dargestellt.

Körper	T/s	$J/\mathrm{kg\,m^2}$	$\sigma_J/\mathrm{kg\,m^2}$
Würfel	0.89	3.30	0.17
Würfel (Ecke)	0.88	3.23	0.16
Zylinder	0.76	2.4	0.11
Scheibe	1.59	10.5	0.57
Hohlzylinder	1.0	4.14	0.18
Hantelkörper	3.08	39.6	1.9
Stab(SP)	2.17	19.7	0.87
Stab(Parallel)	2.47	25.5	1.1

Tabelle 2: Trägheitsmomente aus Drehschwingung

Körper	$J/10^{-4}\mathrm{kg\,m^2}$	Abweichung in %
Würfel	4.05	23
Würfel (Ecke)	4.05	25
Zylinder	2.89	21
Scheibe	13.4	27
Hohlzylinder	5.93	43
Hantelkörper	72.0	81
Stab(SP)	22.1	12
Stab(Parallel)	28.9	13

Tabelle 3: Trägheitsmomente aus Theorie

4.1.3 Trägheitsellipse der Tischchens

Aus der Vermessung der Schwingungsdauern des Tischchens folgten für unterschiedliche Winkel unterschiedliche Trägheitsmomente (nach derselben Formel wie in 4.1.2). Im folgenden Polardiagramm ist $\frac{1}{\sqrt{J}}$ über dem entsprechenden Winkel aufgetragen.
Graphisch gut zu erkennen sind die beiden Hauptträgheitsachsen bei ungefähr 15 ° und 105°.

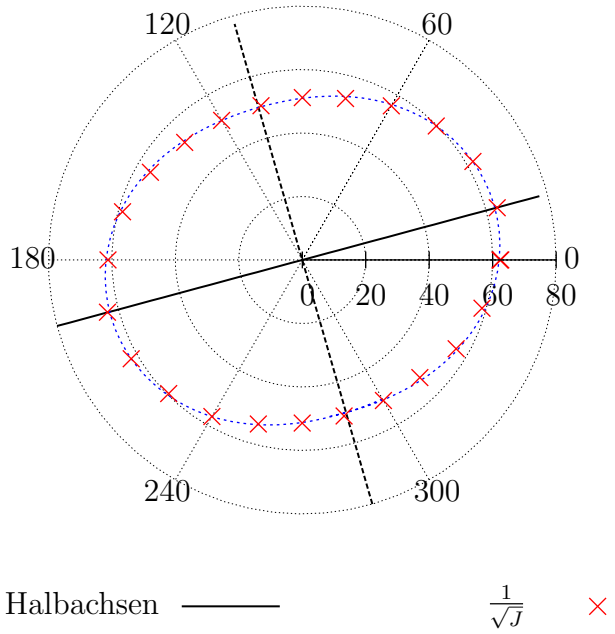

Abbildung 5: Trägheitsellipse

4.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

4.2.1 Beschleunigung durch Gewichte

Aus den Beziehungen

$$L = J\omega \qquad \text{mit} \qquad \dot{\omega} = \frac{a}{R}$$
$$\Rightarrow \text{hier } D = J\dot{\omega} \qquad\qquad D = mgr$$

(siehe [1] S.138) folgt

$$J = \frac{rRmg}{a} \tag{10}$$

Hierbei ist r Radius des kleinen Rades, R Radius des großen Rades, g Erdbeschleunigung und m Masse des angehängten Gewichtes. Davon ist noch mr^2 abzuziehen. Es entspricht dem Trägheitsmoment des beschleunigenden Gewichtes, das ja sozusagen in Abstand r (Radius des kleinen Rades) von der Achse entsteht, weil die beschleunigende Masse gleichzeitig auch träge Masse ist. Um das Trägheitsmoment des Rades zu erhalten muss man dieses abziehen. Für die unterschiedlichen Gewichte ergeben sich die in Tabelle 4 Werte.
Im Mittel ergibt sich so $J = 1.84 \times 10^{-1}\,\mathrm{kgm}^2$.

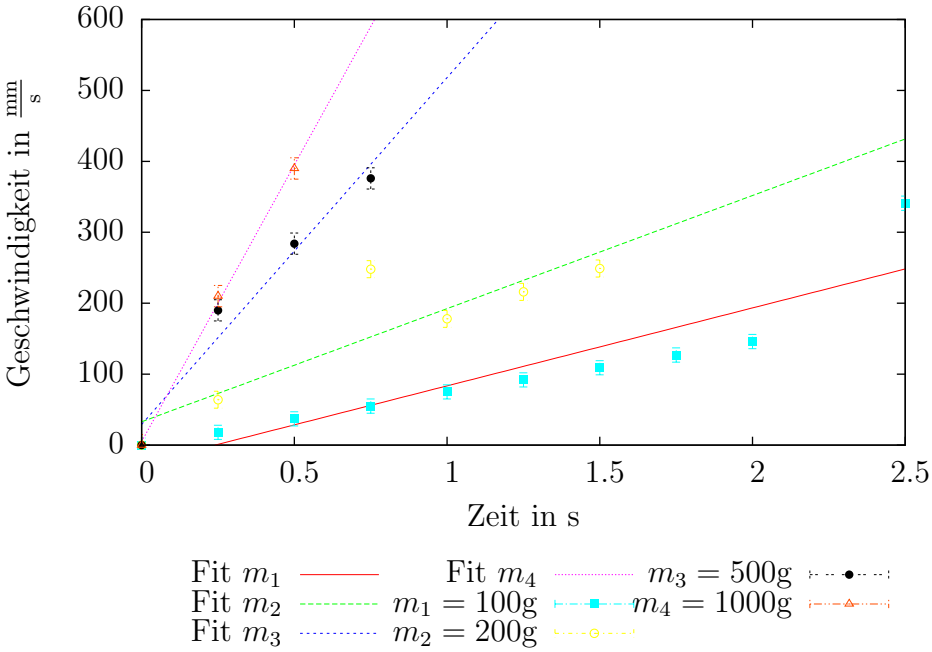

Abbildung 6: Radbeschleunigung

m/kg	$a/10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$J/10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}$	$\sigma_J/\mathrm{kg\,m^2}$
100g	0.110	0.098	0.001
200g	0.159	0.137	0.002
500g	0.489	0.111	0.001
1000g	0.780	0.139	0.001

Tabelle 4: Trägheitsmoment aus verschiedenen Beschleunigungen.

4.2.2 Trägheitsmoment aus Pendelschwingung

Das Trägheitsmoment lässt sich nach $J = \frac{T^2 zmg}{4\pi^2} - mz^2$ aus den gemessenen Schwingungsdauern berechnen (s. o.). Der Term $-mz^2$ zieht das Trägheitsmoment des Zusatzgewichtes wieder ab, damit nur das Trägheitsmoment des Rades verbleibt. z steht dabei für den Abstand des Zusatzgewichtes zur Drehachse. So ergibt sich ein Trägheitsmoment von $(0.039 \pm 0.0015)\,\mathrm{kgm^2}$

5 Diskussion

5.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen

Die aus den Drehschwingungen ermittelten Werte für das Trägheitsmoment der Körper weichen stark von den theoretisch berechneten ab. Dass alle experimentellen Werte kleiner sind als die theoretischen lässt auf einen systematischen Fehler schließen. Ein möglicher Grund könnte unsere stark inhomogene Feder sein, die nach rechts und links deutlich unterschiedliche Winkelrichtgrößen besaß. Dadurch könnten sich kürzere Schwingungsdauern ergeben haben, die dann zu einem kleineren Trägheitsmoment in der Auswertung der Mesungen führen würden. Ein weiterer Grund für die starken Abweichungen könnte die Befestigung der Körper auf der Feder sein. die Halterungen der körper sind aus Metall und werden bei der Bestimmung des Gewichtes der Körper mitgewogen. bei den Körpern aus Holz könnten sie sogar einen beträchtlichen Massenanteil ausmachen. In der Theorie werden die Körper dann als homogen, also mit konstanter Massendichte, angenommen. In Wahrheit liegt jedoch ein Großer Teil der Masse, nämlich die Halterung, sehr nah an der Drehachse und in den äußeren Bereichen der Körper, die ins Trägheitsmoment ja wesentlich stärker eingehen, ist die Massendichte geringer. Dies führt ebenfalls zu einer Verringerung der gemessenen Schwingungsdauer und so auch zu einem geringeren Trägheitsmoment. Weiterhin mussten ja auch für die Bestimmung der theoretischen Werte Messungen vorgenommen werden, die aufgrund der Messapparatur ebenfalls mit systematischem Fehler belegt sein könnten. So war es uns schwer möglich den Umfang von Körpern korrekt zu messen, weil sich das umgelegte Seil dehnte. Für den Hantelkörper und den Hohlzylinder ergeben sich die stärksten Abweichungen. Beim Hohlzylinder könnte das daran liegen, dass die Befestigung hier sogar noch größeren einfluss auf das Trägheitsmoment hatte, weil sie aus einer Metallplatte bestand, die von der Mitte bis nach außen auf den Hohlzylinder aufgesetzt war. ihr relativer Anteil am Gewicht wird noch größer gewesen sein als bei den anderen Körpern. In der Theorie gibt es bei der Drehachse des Hohlzylinders aber gar keine Masse, was den Fehler natürlich hier besonders in die Höhe treibt. Die große Abweichung im Wert des Hantelkörpers rührt daher, dass dieser am besten durch die zwei Hanteln als Punktmassen und den Stab beschrieben werden kann. Da wir bei der Versuchsdurchführung nur die Gesamtmasse bestimmt haben, mussten wir das Trägheitsmoment für eine Punktmasse im Abstand der Hanteln nähern, was folglich einen bedeutend größeren Wert liefert.
Die Trägheitsellipse des Tischchens stimmt mit den Erwartungen gut überein. Die theoretisch erwartete Form der Ellipse, als zweidimensionales Ellipsoid wird sehr gut erreicht. Die verwendete Auftragsform $\frac{1}{\sqrt{J}}$ trägt durch den flachen verlauf der Wurzelfunktion noch zusätzlich zur "Glattheit"der Ellipse bei. Die Hauptträgheitsachsen sind ebenfalls gut zu erkennen.

5.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

Die Ergebnisse aus den Winkelbeschleunigungen sind wesentlich ungenauer und stimmen auch nicht überein. Mögliche Erklärungen sind die von uns zu hoch gewählte Auslenkung des Physikalischen Pendels, die dafür sorgt, dass unsere Lösungsformeln, in denen wir die Kleinwinkelnäherung angewandt hatten, ungenau werden, und die deutliche Messproblematik, den Abstand des Zusatzgewichtes von der Drehachse und die Radien der Räder mit einem Faden genau zu bestimmen (Speichen im Weg, Rad nicht ganz rund). So ergibt sich ein sehr ungenauer Wert, der vor allem nicht gut mit dem übereinstimmt, der aus den Winkelbeschleunigungen bestimmt wurde. Bei der Bestimmung der Winkelbeschleunigung ergab sich nämlich ein weiteres Problem. der verwendete Markengeber brachte nur im Abstand von 0,25 s Markierungen auf dem Papier an. So ergaben sich viel zu wenig Messwerte, was auch in Abbildung 6 deutlich zu erkennen ist. Dadurch wurden die Fits schlecht und damit auch die Fehler der Beschleunigung groß. Insgesamt ergeben sich keine guten Werte.

Literatur

[1] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013

[2] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, 21. Auflage, Springer Spektrum 2002

[3] H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*

[4] http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3606 (Für Bilder)