

**Versuch 9**  
**Magnetfeld von Spulen**

---

Praktikant: Lennart Jahn  
Mitpraktikant: Jonas Isensee  
E-Mail: l.jahn@stud.uni-goettingen.de  
jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Chuck Norris  
Datum: 16.06.2016

Zensur:

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>3</b>
2.1. Magnetfeld einer Spule . . . . .	3
2.2. Induktion . . . . .	3
2.3. Helmholtz-Spule . . . . .	4
2.4. Stromintegrator . . . . .	4
2.5. Hall-Sonde . . . . .	5
<b>3. Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1. Eichung des Stromintegrators . . . . .	6
3.2. Messung mit Induktionsspule . . . . .	6
3.3. Messung mit Hallsonde . . . . .	7
<b>4. Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1. Messung Induktionsspule . . . . .	7
4.2. Messung Hallsonde . . . . .	8
4.3. Homogenität der Felder . . . . .	9
4.4. Bestimmung von $\mu_0$ . . . . .	11
<b>5. Diskussion</b>	<b>12</b>
5.1. Vergleich Hallsonde und Induktionsspule . . . . .	12
5.2. Messungen . . . . .	12
5.3. Homogenität der Helmholtzspule . . . . .	13
<b>Literatur</b>	<b>13</b>
<b>A. Eichung des Stromintegrators</b>	<b>14</b>

---

# 1. Einleitung

In diesem Versuch soll das Magnetfeld von verschiedenen Spulen betrachtet werden. Dazu wird der Flussdichtenverlauf auf der Achse einer langen, einer kurzen und einer Helmholtz-Spule bestimmt und mit den jeweils Anderen verglichen. Es sollen ferner Einsichten gewonnen werden, welches der eingesetzten Messverfahren am exaktesten ist.

## 2. Theorie

### 2.1. Magnetfeld einer Spule

Durch die Bewegung geladener Teilchen entsteht ein Magnetfeld. Wickelt man nun einen Leiter zu einer Spule auf und lässt einen Strom durch ihn fließen, so entsteht im Inneren der Spule ein Magnetfeld. In erster Näherung lässt sich die Magnetische Flussdichte  $B$  im Inneren einer Spule (nach [2] S. 93) angeben als:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{l}. \quad (1)$$

Dabei ist  $l$  die Länge der Spule,  $I$  der Strom, der fließt,  $n$  die Anzahl der Windungen der Spule und  $\mu_0$  eine Proportionalitätskonstante, genannt magnetische Feldkonstante oder auch Permeabilitätszahl.  $\mu_r$  ist eine weitere Konstante, genannt relative Permeabilität und kann für Luft in guter Näherung als 1 gesetzt werden.

In dieser Formel wird angenommen, der Radius sei sehr klein gegenüber der Länge der Spule und das Magnetfeld werde genau in der Mitte der Spule gemessen. Da im Versuch beide Annahmen nicht immer gelten, muss eine exaktere Formel gefunden werden. In [2] auf Seite 93 findet sich die Herleitung der Formel

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{1}{2} \frac{nI}{l} \left[ \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}} \right] \quad (2)$$

für das Magnetfeld der Allgemeinen Spule. Dabei werden nun zusätzlich Radius  $R$  und Abstand  $a$  vom Rand der Spule berücksichtigt.

### 2.2. Induktion

Der magnetische Fluss  $\Phi$  durch eine Leiterschleife, die die Fläche  $\vec{A}$  im Raum umschließt, ist definiert als  $\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$ . Bei zeitlicher Änderung von  $\Phi$  (sowohl bei Veränderung von  $\vec{A}$  als auch von  $\vec{B}$ ) wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Diese Induktionsspannung beträgt nach dem Induktionsgesetz (siehe [1] S.398)

---


$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\dot{\Phi}. \quad (3)$$

Das Minuszeichen ist eine Konsequenz der LENZschen Regel, nach der das durch den induzierten Strom entstehende Magnetfeld dem erzeugenden Magnetfeld entgegenwirken muss.

Ändert sich nun das Magnetfeld in einer Spule, so wird in ihr nach 3 ein Spannungstoß induziert. Dabei gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{ind} dt = n \Delta\Phi = nA \Delta B. \quad (4)$$

### 2.3. Helmholtz-Spule

Das Magnetfeld einer Spule ist, wie in Abschnitt 2.1 ersichtlich, nicht sehr homogen, es sei denn man befindet sich im Inneren einer sehr langen, dünnen Spule. Da sich dort nicht effizient arbeiten lässt, wollte Helmholtz eine einfache Anordnung von Spulen finden, die ein möglichst homogenes, gut erreichbares Magnetfeld produziert. Als Lösung fand er zwei sehr kurze Spulen, die im Abstand ihres Radius voneinander stehen. In der Mitte dieser Anordnung ergibt sich ein sehr homogenes Feld mit der Flussdichte

$$B(d) = \mu_0 \mu_r \frac{1}{2} n I R^2 \left[ \left( R^2 + \left( d + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( R^2 - \left( d + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \quad (5)$$

(siehe [2] S.92). Bei  $d = 0$  ergibt sich also:

$$B = \mu_0 \mu_r \left( \frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{nI}{R}. \quad (6)$$

dabei ist  $d$  der Abstand von der Spulenmitte,  $\mu_0, \mu_r, n, I, R$  wie oben.

### 2.4. Stromintegrator

Der analoge Stromintegrator integriert, mittels eines Operationsverstärkers, die in einem Zeitintervall geflossene Ladung auf und gibt diese als Spannung aus. Kennt man den Eichwiderstand  $R_e$  des Stromintegrators, so folgt mit Gleichung 4 für eine Induktionsspule:

$$nA \Delta B = \int_{t_1}^{t_2} U_{ind} dt = R_e \int_{t_1}^{t_2} I_{ind} dt = R_e Q_S. \quad (7)$$

Hierbei wird der Widerstand der Spule gegen  $R_e$  vernachlässigt und  $Q_S$  ist die Ladungsmenge, die durch den Stromintegrator geflossen ist.

---

## 2.5. Hall-Sonde

In einer Hall-Sonde fließt ein konstanter Strom durch ein dünnes Halbleiterplättchen. Durch Lorentzkräfte werden die Elektronen zu einer Seite abgelenkt und sammeln sich dort an. Es entsteht ein elektrisches Feld, welches die Elektronen zur anderen Seite drängt. Nach kurzer Zeit entsteht ein Gleichgewichtszustand und die Hallspannung  $U_H$  kann zwischen den beiden Seiten gemessen werden. Diese ist nach [1] S.370:

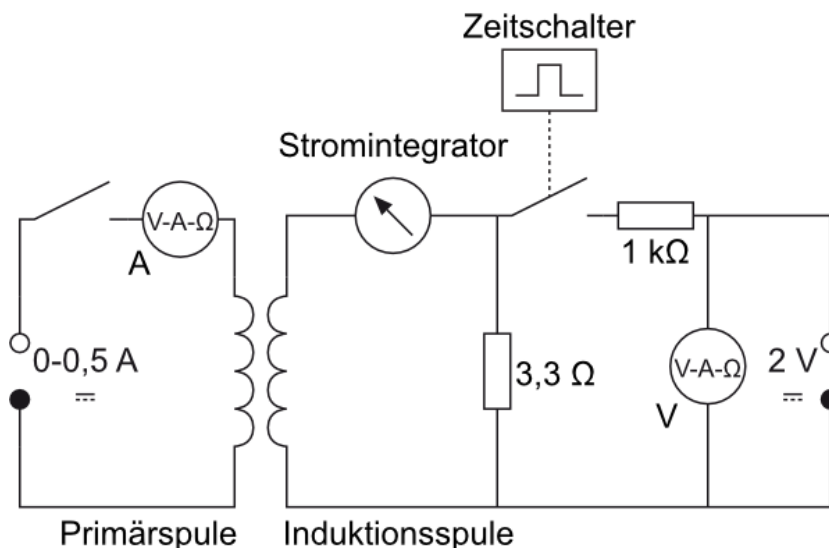
$$U_H = vbB.$$

Sie ist damit proportional zur magnetischen Flussdichte  $B$ .  $v$  und  $b$  sind Driftgeschwindigkeit der Elektronen und Breite des Halbleiterplättchens (gerätespezifische Konstanten).  $B$  errechnet sich also einfach als  $B = \frac{U_H}{vb}$ .

## 3. Durchführung

Die Messschaltung zur Bestimmung des Magnetfeldes der langen Spule mittels Induktionsspule wird nach Abb. 1 aufgebaut und es werden alle benötigten Spulendaten notiert. Es werden drei verschiedene Spulentypen untersucht:

- Die lange Spule** Ihr Radius ist klein gegenüber ihrer Länge.
- Die kurze Spule** Ihr Durchmesser ist fast so groß wie ihre Länge..
- Die Helmholtzspule** Sie genügt den Anforderungen von Abschnitt 2.3



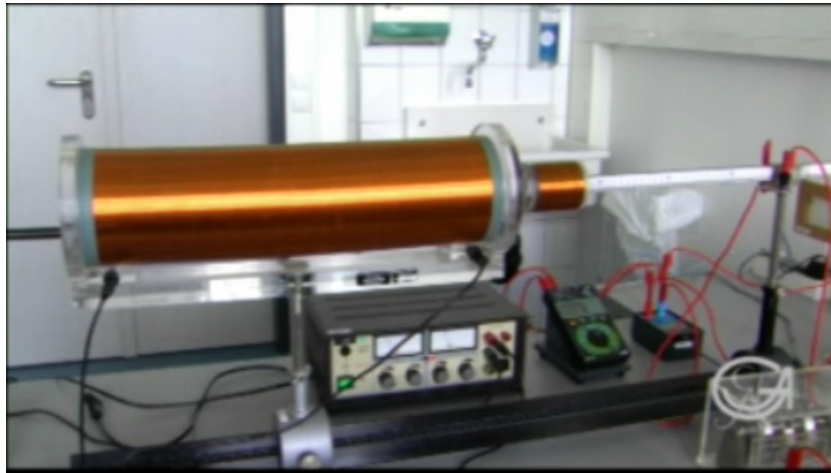
**Abbildung 1:** Schaltplan der Messanordnung zur Bestimmung des Magnetfeldes mittels Induktionsspule. Quelle: [3]

---

### 3.1. Eichung des Stromintegrators

Um die vom Stromintegrator angezeigte einheitenlose Zahl in die integrierte Ladung umrechnen zu können, wird eine Eichungsmessung durchgeführt. Mit dem Zeitschalter werden Spannungsimpulse der Spannung 2 V und Zeitdauern zwischen 50 ms und 500 ms generiert. Über den dabei fließenden Strom wird integriert, die vom Stromintegrator ausgegebene Zahl wird notiert.

### 3.2. Messung mit Induktionsspule



**Abbildung 2:** Aufbau der Messanordnung mit der Induktionsspule. Unten im Bild ist die Schiene zu erkennen, auf der die Induktionsspule bewegt wird. Links ist die lange Spule montiert, rechts, am Stab, die Induktionsspule. Später wird die Hallsonde analog montiert. Quelle: Videoanleitung in [3]

Das Magnetfeld der langen Spule wird mittels der Induktionsspule vermessen. Dazu werden lange Spule und Induktionsspule auf einer Schiene montiert. Die Induktionsspule wird mittels einer Stange so befestigt, dass sie in die lange Spule geschoben werden kann (siehe Abb. 2). Die Spulenachsen werden möglichst gut zur Deckung gebracht. Nun wird die Induktionsspule in die Mitte der langen Spule geschoben. Von dort aus wird sie nach jeder Messung 2 cm nach außen bewegt. Die Messungen wurden bei 30 cm Abstand von der Spulenmitte beendet.

Zur Messung der Flussdichte wird an jeder Position in der langen Spule ein Strom von 0.5 A an und wieder ausgestellt und über den dabei durch die Induktionsspule fließenden Strom integriert. Es werden also pro Position zwei Messwerte aufgenommen.

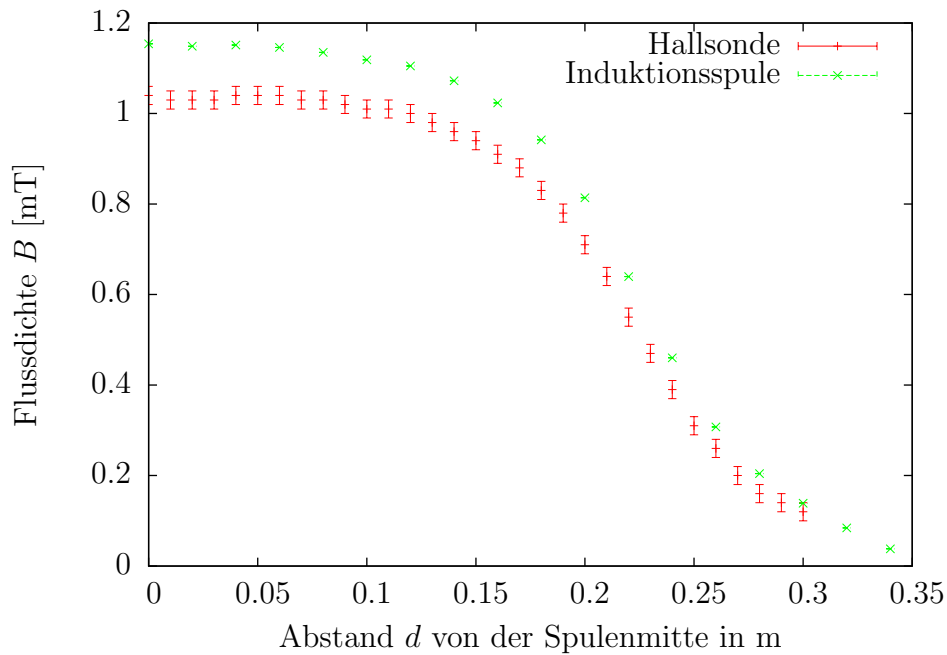
---

### 3.3. Messung mit Hallsonde

Nun werden die Magnetfelder aller Spulen mit der Hallsonde bestimmt. Auch die lange Spule wird erneut gemessen, damit ein Vergleich zwischen Hallsonde und Induktionsspule möglich ist. Dazu wird die Hallsonde, wie zuvor die Induktionsspule, auf der Schiene montiert und in analoger Weise durch die Spule bewegt. Der Strom wird ebenfalls bei 0.5 A gehalten. Es wird allerdings nun im Abstand von 1 cm gemessen. Die angezeigte Flussdichte wird notiert. Es ist ratsam, den Strom zwischen den Messungen abzustellen und den aktuellen Offset der Hallsonde zu notieren, da diese ja zusätzlich alle existierenden Felder der Umgebung mitmisst. Die Messung wird für die restlichen Spulen wiederholt.

## 4. Auswertung

### 4.1. Messung Induktionsspule



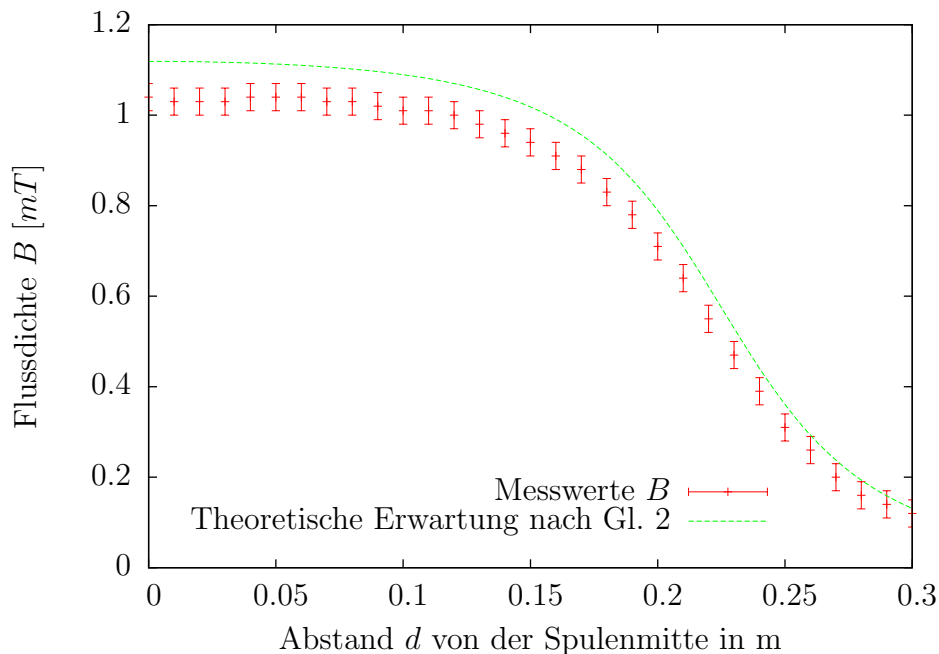
**Abbildung 3:** Flussdichte  $B$  in der langen Spule über dem Abstand  $d$  von der Spulenmitte. In Grün: Messung mit Induktionsspule, in Rot: Messung mit Hallsonde.

Zuerst wird aus den beiden Werten  $x$  für Ein- und Ausschaltvorgang der langen Spule das arithmetische Mittel gebildet. Der Fehler beträgt dann  $\sigma_M = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}$ . Um nun aus diesen  $x_M$  die Flussdichte in der Spule berechnen zu können, sind einige messungsspezifische Rechnungen durchzuführen. Diese sind in Anhang A zu finden. Es ergibt sich der in

Abb. 3 dargestellte Feldverlauf. Der Fehler der Werte, der sich aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung von Gleichung 8 ergibt, ist sehr klein, weil alle Widerstände als fehlerfrei angenommen werden. Zum Vergleich sind auch die Messwerte der Hallsonde mit eingezeichnet. Diese liegen konstant unter denen der Induktionsspule, ergeben aber die gleiche Form des Kurvenverlaufs. Der Fehler der Hallsonde wurde als 0.03 mT abgeschätzt. Vergleicht man den Kurvenverlauf der beiden Messungen mit dem erwarteten Wert, der in Abbildung 4 zu sehen ist, so scheint die Messung mit der Induktionsspule genauer.

## 4.2. Messung Hallsonde

Die gemessenen und die nach Gleichung 2 errechneten Werte für das Magnetfeld der langen und der kurzen Spule sind in Abbildung 4 und 5 dargestellt. Der Fehler der Messung mit der Hallsonde wird wieder mit 0.03 mT abgeschätzt. Offensichtlich liegen die Mess-



**Abbildung 4:** Rot: Magnetische Flussdichte  $B$  im Inneren der langen Spule, gemessen mit Hallsonde, aufgetragen über dem Abstand  $d$  von der Spulenmitte. Zum Vergleich in grün: Theoriewert unter Verwendung von Gleichung 2.

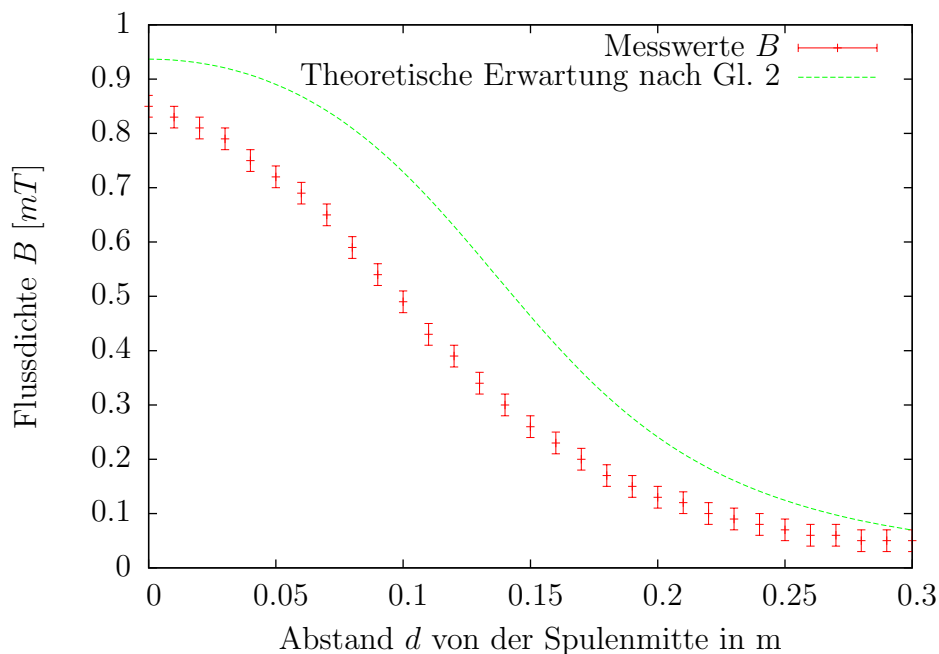
werte bei beiden Spulen unter den erwarteten Werten. Der Abfall des Magnetfeldes zu den Seiten hin erfolgt jedoch in der erwarteten Form, wobei die kurze Spule die größeren Abweichungen zeigt. In Tabelle 1 sind die gemessenen und erwarteten Maximalwerte im Spuleninneren nochmals zusammengefasst.



Spule	Messwert	Theoriewert nach Gl. 1	Theoriewert nach Gl. 2
lang	$(1.04 \pm 0.03) \text{ mT}$	1.16 mT	1.12 mT
kurz	$(0.85 \pm 0.03) \text{ mT}$	1.16 mT	0.94 mT

**Tabelle 1:** Magnetfeld in der Mitte der langen und kurzen Spule im Vergleich mit theoretischen Werten.

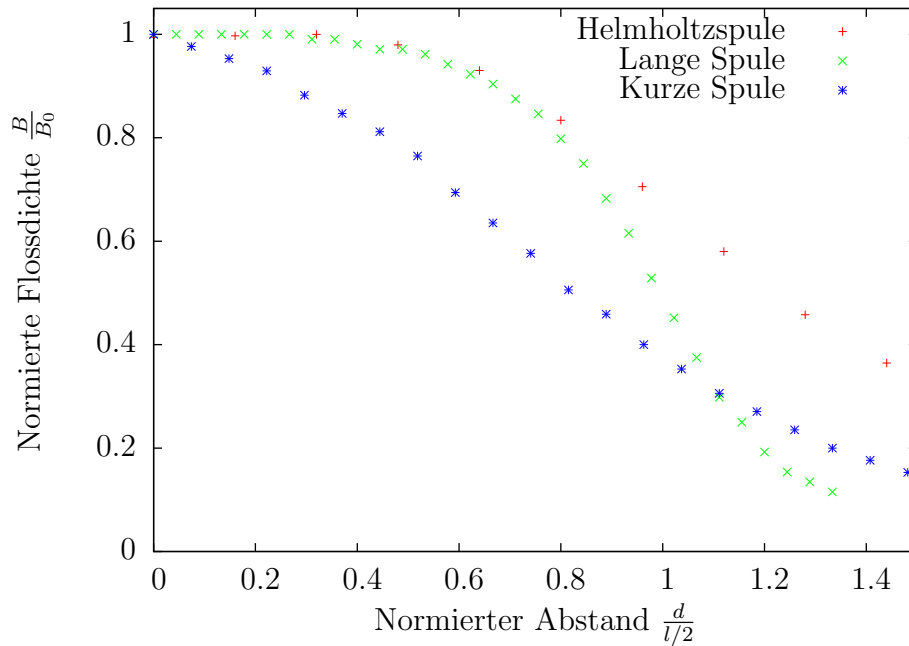
Aus den Abbildungen und der Tabelle ist gut zu erkennen, dass die Näherungen von Formel 1 für die kurze Spule nicht mehr gelten. Für die lange Spule sind sie in der Mitte der Spule noch vertretbar. In den Außenbereichen der Spulen ist jedoch die Beschreibung durch Formel 1 nicht mehr haltbar.



**Abbildung 5:** Rot: Magnetische Flussdichte  $B$  im Inneren der kurzen Spule, gemessen mit Hallsonde, aufgetragen über dem Abstand  $d$  von der Spulenmitte. Zum Vergleich in grün: Theoriewert unter Verwendung von Gleichung 2.

### 4.3. Homogenität der Felder

Für die Helmholtzspule wurden wegen einer schiefen Spule zwei Messungen durchgeführt, eine zu jeder Seite. Für die Auswertung werden nun nur die Ergebnisse der Seite verwendet, die der schiefen Spule gegenüberliegt, da diese höchstwahrscheinlich genauer sind, weil die schiefe Spule weiter entfernt ist und so weniger störende Effekte ausübt.



**Abbildung 6:** Auf Spulenlänge und Maximalfeldstärke normierter Feldverlauf der drei Spulen im Vergleich. Rot: Helmholtzspule, Grün: Lange Spule, Blau: Kurze Spule.

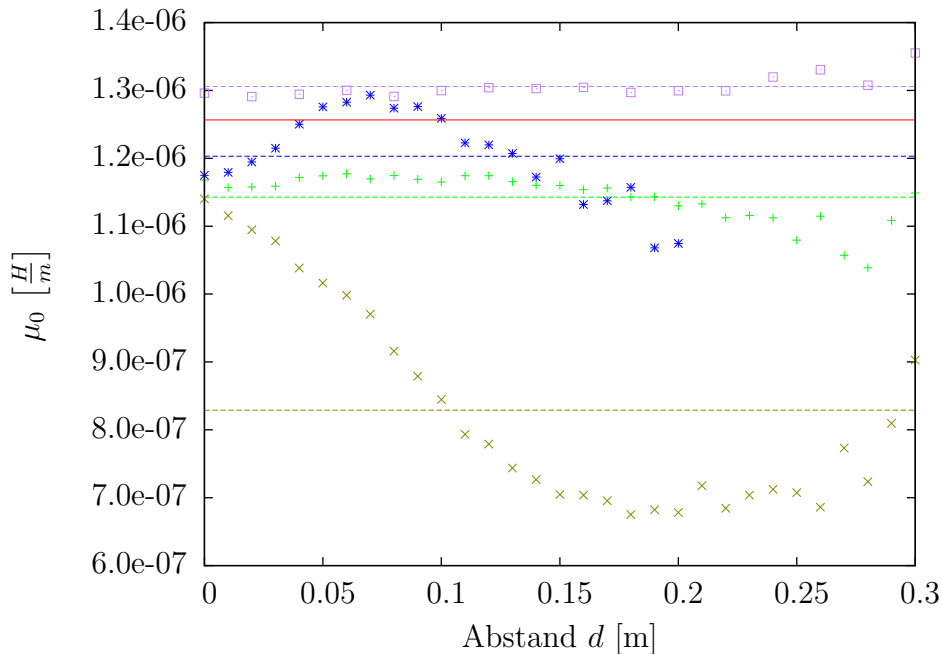
Die Stärke des Magnetfeldes der Helmholtzspule beträgt im Inneren maximal 3.43 mT. Aus Formel 6 folgen  $(3.64 \pm 0.2)$  mT Erwartungswert. Der Messwert liegt also im  $1\sigma$ -Intervall. Der Fehler entsteht mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung. Dabei wird der Messfehler des Radius mit 0.5 cm abgeschätzt. Alle anderen Werte werden als fehlerfrei angenommen. Das Feld der Helmholtzspule ist wesentlich stärker als das der langen und der kurzen Spule. Das lässt sich hier sehr einfach dadurch erklären, dass die verwendete Helmholtzspule mehr Windungen bei deutlich kleineren Abmessungen besitzt.

Um die Homogenität der Felder vergleichen zu können, wurde in Abbildung 6 der Feldstärkeverlauf der drei Spulen in ein gemeinsames Diagramm gezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber wurden Fehler weggelassen. Um den Vergleich zu erleichtern, wurde die Feldstärke  $B$  mit der jeweiligen Maximalfeldstärke  $B_0$  normalisiert. Weiterhin wurde die Entfernung  $d$  von der Mitte der Spule durch die halbe Spulenlänge  $l/2$  geteilt, um das Spulenende jeweils auf 1 zu normieren.

Es ist sehr gut zu erkennen, dass das Magnetfeld innerhalb der langen Spule und der Helmholtzspule bis zur Hälfte des Weges von der Spulenmitte zum Spulenende sehr homogen ist. Danach fällt es bei beiden ab, die Helmholtzspule zeigt dabei das langsamere Abfallverhalten. Das Feld der kurzen Spule ist deutlich inhomogener, fällt aber gleichmäßiger ab als das der langen Spule. Insgesamt hat also die Helmholtzspule das stärkste, und erreichbarste Magnetfeld erzeugt, bei der Homogenität sind Helmholtzspule und lange Spule gleichauf.

#### 4.4. Bestimmung von $\mu_0$

Mittels Gleichung 1 lässt sich aus den Messdaten die Permeabilitätszahl  $\mu_0 = \frac{B}{H}$  bestimmen.  $B$  wurde gemessen und  $H$  wurde je nach Spule über Gleichung 2 oder 5 durch Fortlassen des Faktors  $\mu_0\mu_r$  berechnet. In Diagramm 7 ist das so berechnete  $\mu_0$  für jede Messreihe dargestellt. Auch hier wurden die Fehler der Übersichtlichkeit halber weglassen. Die Mittelwerte für  $\mu_0$  sind in Tabelle 2 zum Vergleich zusammengestellt. Sie wurden durch einen `gnuplot`  $\chi^2$ -Fit einer Konstante an die errechneten Werte, mit ebenfalls von `gnuplot` bestimmten Standardfehler, ermittelt. Das Gesamtmittel ist der gewichtete Mittelwert mit Fehler des gewichteten Mittelwertes. Es liegt nahe am tatsächlichen Wert von  $\mu_0$ . Da `gnuplot` sehr kleine Fehler angibt, liegt der exakte Wert aber nur im  $4\sigma$ -Intervall um den Mittelwert.



**Abbildung 7:** Berechnete  $\mu_0$  über dem Abstand  $d$  vom Spulenende für alle verschiedenen Spulen. Zusätzlich sind die jeweiligen Mittelwerte der Spulen für  $\mu_0$  in derselben Farbe gestrichelt eingezeichnet.

Farben:	
Rot:	Tatsächlicher Wert $\mu_0$
Blau:	Helmholtzspule
Grün:	Lange Spule
Lila:	Lange Spule mit Induktionsspule
Gelb:	Kurze Spule

---

	$\mu_0 \times 10^{-6} \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$	Fehler $10^{-6} \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$
Lange Spule Induktion	1.305	$\pm 0.005$
Helmholtzspule	1.2	$\pm 0.02$
Lange Spule	1.143	$\pm 0.007$
Kurze Spule	0.83	$\pm 0.03$
Gesamtmittel	1.241	0.004
Exakter Wert	$\approx 1.2566$	

**Tabelle 2:** Mittelwerte für  $\mu_0$  der verschiedenen Spulen.

## 5. Diskussion

### 5.1. Vergleich Hallsonde und Induktionsspule

Beide Verfahren weichen vom Theoriewert ab, die Hallsonde misst geringere Flussdichten, die Induktionsspule höhere. Insgesamt liegen jedoch die Messwerte der Induktionsspule näher an den theoretisch Erwarteten. Beide Verfahren haben Ihre Nachteile, durch die Umständliche Umrechnung bei der Induktionsspule oder das ständige notieren des Offset der Hallsonde. Insgesamt ist aber die Hallsonde praktikabler, da sie nur über einen kleinen Raumbereich misst und daher bei Platzmangel oder inhomogeneren Feldern besser einsetzbar ist. Weiterhin misst sie direkt das Feld, ohne dass es ein- und ausgeschaltet werden muss.

### 5.2. Messungen

Die Messwerte der Hallsonde sind alle zu gering, das lässt auf einen systematischen Fehler im Gerät schließen. Eine weitere Ursache für zu kleine Werte könnte jedoch auch sein, dass beim Messen nicht genau in der Spulenmitte begonnen wurde. Insbesondere der Feldverlauf der kurzen Spule lässt auf solch einen Fehler schließen. Verschiebt man die Werte um etwa 4 cm nach rechts (vgl. hierzu Abb. 5) so stimmen Erwartung und Messwerte deutlich besser überein.

Die erste Messreihe der Helmholtzspule wurde verworfen, weil die Werte auf Grund der schiefen Spule zu schnell abfielen. Die zweite Messreihe führt jedoch zu guten Ergebnissen für den Maximalwert  $B_0$ , dieser liegt im  $1\sigma$ -Bereich, und ebenfalls zu einer guten Näherung von  $\mu_0$ , hier liegt der exakte Wert im  $3\sigma$ -Intervall.

---

### 5.3. Homogenität der Helmholtzspule

Obwohl eine Spule schief war, war das Magnetfeld der Helmholtzspule im Inneren sehr homogen. Von der Mitte bis zur Hälfte der Spule war das Magnetfeld nahezu konstant, auch danach zeigte sich ein sehr sanfter Abfall. Vielleicht wäre das Feld bei einer intakten Spule noch homogener gewesen. Die Helmholtzspule erfüllt also ihren Zweck, ein erreichbares, homogenes Magnetfeld zu erzeugen gut.

### Literatur

- [1] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Springer Spektrum 2015
- [2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013
- [3] P. Schaaf, J. Grosse-Knetter  
<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>, abgerufen 20.06.16

---

## A. Eichung des Stromintegrators

Um die vom Stromintegrator angezeigte Zahl  $x$  in eine in die geflossene Ladung  $Q_S$  umrechnen zu können, muss die Eichkonstante  $k$  des Stromintegrators gestimmt werden, die die Beziehung  $Q_S = kx$  herstellt.

Dazu muss ersteinmal die in der Eichmessung über den Stromintegrator geflossene Ladung bestimmt werden. Mittels der KIRCHHOFFSchen Gesetzze kann der Strom über den Stromintegrator bestimmt werden. Für der Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  der Schaltung wie in Abbildung 1 gilt:

$$R_{ges} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_i}}.$$

Dabei ist  $R_2$  der Widerstand parallel zum Stromintegrator und  $R_2$  der Widerstand in Reihe. Außerdem wird erneut der Widerstand der Induktionsspule gegenüber dem Innenwiderstand  $R_S$  des Stromintegrators vernachlässigt.

In der Reihenschaltung teilt sich die Spannung auf, es gilt also:

$$U = R_S I_S + R_1 I_{ges}.$$

Daraus folgt:

$$I_S = \frac{U - R_1 I_{ges}}{R_S}$$

Nimmt man den Strom während der Impulszeit als konstant an, so folgt für die Ladung:  $Q_S = I_S \Delta t$ . Nun kann  $k$  einfach berechnet werden:

$$k = \frac{I_S \Delta t}{x}.$$

Über alle erhaltenen Werte von  $k$  wird gemittelt und dann die mittlere quadratische Standardabweichung bestimmt. Es ergibt sich:  $k = (54.9 \pm 0.2) \times 10^{-9} \frac{1}{C}$ .

Zur Anwendung von Formel 7 fehlt nun nur noch der Eichwiderstand  $R_e$ . Dieser ist nach dem Gesetz zur Reihenschaltung von Widerständen einfach  $R_S + R_2$ .

Insgesamt ergibt sich also mit Formel 7:

$$\Delta B = \frac{R_e k x}{nA}. \quad (8)$$