

Versuch 16
Prismen- und Gitterspektrometrie

Praktikanten: Jonas Isensee

Lennart Jahn

E-Mail: jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de

l.jahn@stud.uni-goettingen.de

Betreuer: Lukas Hupe

Datum: 15.12.2016

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Das Prismenspektrometer	3
2.2	Das Gitterspektrometer	3
2.3	Auflösungsvermögen	4
3	Durchführung	5
3.1	Vorbereitung	5
3.2	Messungen mit einem Prisma	6
3.3	Messung mit einem optischen Gitter	6
4	Auswertung	6
4.1	Allgemeines	6
4.2	Prismenspektrometer	7
4.3	Gitterspektrometer	8
5	Diskussion	10
	Literatur	11

1 Einleitung

Spektrometrie ist ein Verfahren zur Analyse von Licht, das in vielen Bereichen der Naturwissenschaften Anwendung findet. Ein Spektrometer trennt Licht in sein einzelnen Wellenlängen auf und erlaubt so zum Beispiel Rückschlüsse auf die Stoffe, die das Licht erzeugt haben. In diesem Versuch sollen die Eigenschaften zweier Spektrometer untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Das Prismenspektrometer

Fallen Lichtstrahlen auf ein Prisma, so werden sie sowohl an der Eintritts- als auch an der Austrittsfläche gebrochen. Das ist anschaulich in Abbildung 1a dargestellt. Dies lässt sich allgemein mit dem Snelliusschen Gesetz beschreiben. Interessanter ist allerdings der symmetrische Fall, wenn die Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ zum Einfallslot und Ausfallslot gleich sind. Die ist außerdem der Einfallswinkel unter dem die gesamte Ablenkung δ minimiert wird. In diesem Fall gilt die Fraunhofer-Formel, die den Brechungsindex n , den Öffnungswinkel des Prismas $\varepsilon = 60^\circ$, und den minimalen Ablenkungswinkel δ_{\min} in Verbindung setzt. Es gilt: [ZIN, S. 40]

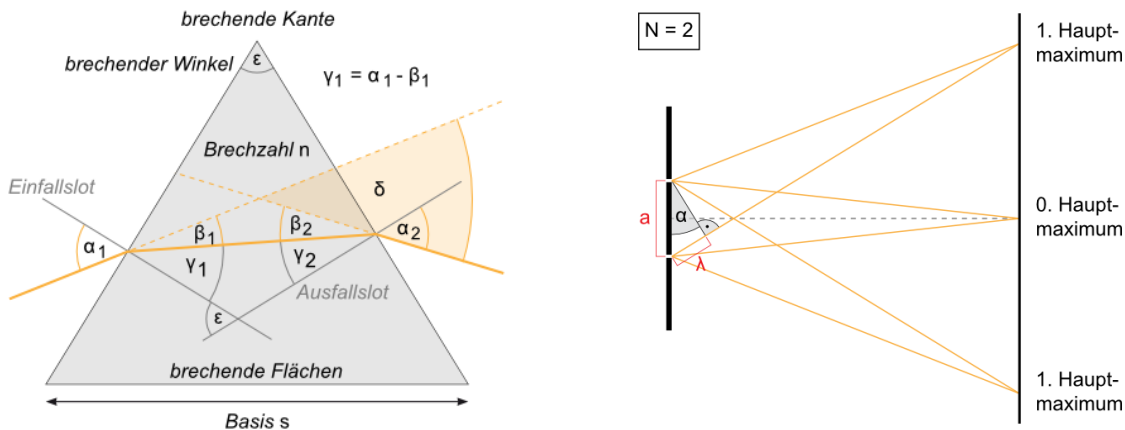
$$n(\lambda) \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta_{\min}(\lambda) + \varepsilon}{2}\right). \quad (1)$$

Unter Verwendung verschiedener bekannter Wellenlängen λ lässt sich mit dieser Formel näherungsweise die Dispersion $\frac{dn}{d\lambda}$ des Prismenmaterials bestimmen.

2.2 Das Gitterspektrometer

Auch ein optischen Gitter kann zur Spektrometrie verwendet werden. Wie in Abbildung 1b an dem einfachsten Beispiel eines Gitters mit nur zwei Spalten verdeutlicht wird. Die Position des 1. Hauptmaximums, sowie alle weiteren k . Maxima, ist abhängig von der Wellenlänge des Lichts. Ist der Abstand (Reziproke Gitterkonstante) a zwischen den Spalten bekannt, so lässt sich aus den Positionen der Maxima die Wellenlängen λ , aus denen sich das einfallende Licht zusammensetzt, berechnen. Ein wesentlicher Unterschied zum Prismenspektrometer ist, dass sich die Wellenlängen aus geometrischer Überlegung berechnen lassen, während beim Prisma gute Kenntnis der Dispersion des Materials nötig ist. Außerdem erzeugt ein Gitter Interferenzmaxima höherer Ordnung, die zumeist genauere Messungen erlauben. Für den Winkel α_{\max} unter dem Licht der Wellenlänge λ im k . Maximum zu sehen ist, gilt die einfache Formel: [ZIN, S. 163]

$$\sin \alpha_{\max} = \pm \frac{k\lambda}{a}.$$



(a) Dies ist eine Zeichnung zur Verdeutlichung der brechenden Winkel in einem Prisma. Besonders von Bedeutung ist dabei der Winkel der Gesamtablenkung δ und der Öffnungswinkel des Prismas ε . Quelle: [LP]

(b) Hier ist schematisch dargestellt, wie an einem Doppelspalt verschiedene Interferenzmaxima entstehen. Dies ist immer dann der Fall, wenn der Wegunterschied ein vielfaches der Wellenlänge λ ist. Quelle: [LP]

Abbildung 1

2.3 Auflösungsvermögen

Die wichtigste Eigenschaft eines jeden optischen Abbildungsgerätes ist sein Auflösungsvermögen. Das Auflösungsvermögen A in Bezug auf Spektrometer ist die Fähigkeit, zwei Wellenlängen $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$, die sehr dicht beieinander liegen, gerade noch unterscheiden zu können. Ist dies der Fall, so definiert man das Auflösungsvermögen des Spektrometers als

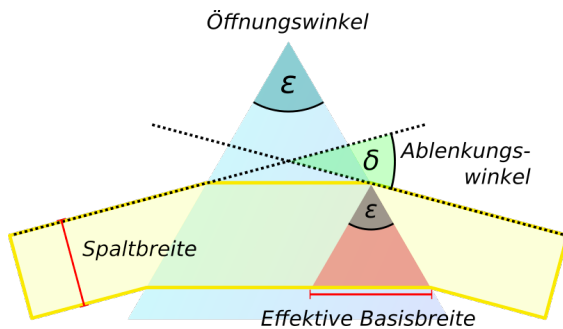
$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (2)$$

Betrachtet man ein Prismenspektrometer, so lässt sich diese Bedingung umformen und es gilt: [ZIN, S. 201]

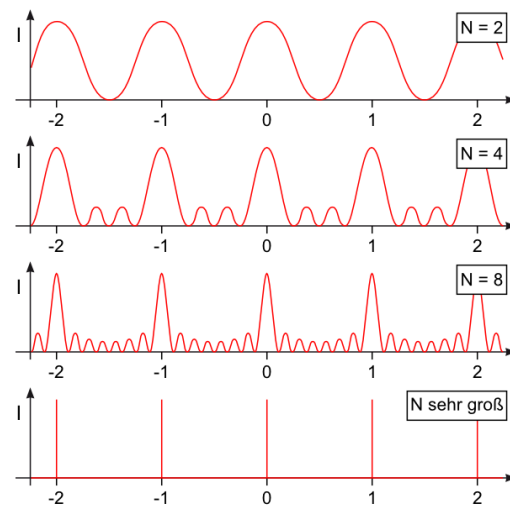
$$A_{\text{Prisma}} = B \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad \text{mit} \quad B := \frac{S}{\cos\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)}. \quad (3)$$

Dabei ist B die effektive Basisbreite, deren Definition anschaulich aus Abb. 2a hervorgeht. Auch für das Gitterspektrometer ist die breite des Lichtstrahls von Bedeutung, da sie bestimmt, wie viele Spalte beleuchtet werden. Je mehr Spalte beleuchtet werden, desto schmaler werden die Maxima und sind somit leichter zu unterscheiden, wie in Abb. 2b verdeutlicht wird. Das Auflösungsvermögen im k . Maximum, wenn N Spalte beleuchtet werden, ist dann: [ZIN, S. 199]

$$A_{\text{Gitter}} = kN. \quad (4)$$



(a) Hier lässt sich erkennen, was mit der effektiven Basisbreite gemeint ist, und wie man durch geometrische Anschauung die Formel dafür herleitet. Quelle: [LH]



(b) Hier sind vier verschiedene sehr vereinfachte Interferenzbilder dargestellt, die ein Gitter mit N beleuchteten Spalten erzeugen würde. Entscheidend ist die Beobachtung, dass die Peaks schmaler werden, je größer N ist. Quelle: [LP]

Abbildung 2

Voraussetzung für diese Überlegungen ist jedoch, dass das Licht als paralleles Bündel mit bekannter Breite S auf das Prisma bzw. das Gitter fällt.

3 Durchführung

Um diesen Versuch erfolgreich durchzuführen, muss der Aufbau sehr gut justiert sein. Auf Erklärungen, wie genau dies zu machen ist, wird hier verzichtet, da sie vom individuellen Aufbau abhängen kann.

3.1 Vorbereitung

Zunächst muss man sich mit der Funktionsweise des Spektrometers vertraut machen. Als Erstes die Spektrallampe vor den Spalt am Ende des Tubus aufgestellt. Das Fernrohr wird so gedreht, dass es direkt auf den Spalt gerichtet ist. Dabei wird auf der Winkelskala der "Null-Winkel" gemessen. Alternativ kann aber auch die Winkelskala auf null verschoben werden. Dann wird der Spalt so verschoben und gedreht, dass er scharf im Fernrohr zu erkennen und vertikal, mittig im Fadenkreuz liegt.

Im nächsten Schritt wird das Prisma auf den Prismenteller gestellt und mit den Nivellierschrauben ausgerichtet. Dann wird es so gedreht, dass der Ablenkungswinkel des gebrochenen

Lichts minimal wird.

3.2 Messungen mit einem Prisma

Bewegt man das Fernrohr, sodass das Fadenkreuz auf einer Linie liegt, kann man den Ablenkwinkel dieser Wellenlänge an der Winkelskala ablesen. Die Ablenkwinkel der gelben (λ_{gelb}) und der grünen ($\lambda_{\text{grün}}$) Linien sind zu bestimmen. Nun wird der Bündelquerschnitt S des Lichts, das auf das Prisma fällt, mit Hilfe des Spaltes verengt. Dies verringert die Auflösung des Spektrometers und die Linien verschwimmen. Die Breite des Spaltes ist für die Einstellung zu notieren, in der die beiden gelben Linien gerade noch zu trennen sind. Falls die Skala der Mikrometerschraube bei geschlossenem Spalt nicht null ist, wird dieser Wert zur Referenz ebenfalls notiert. Außerdem ist noch die geometrische Basisbreite des Prismas zu messen.

3.3 Messung mit einem optischen Gitter

Für diesen Teil des Experimentes wird das Prisma auf dem Prismenteller durch ein optisches Gitter ersetzt. Es wird so aufgestellt, dass das Licht des Spaltes möglichst senkrecht darauf auftrifft. Ähnlich wie zuvor, werden die Ablenkwinkel der gelben, grünen und violetten Linien der 1. und 2. Ordnung gemessen. Zusätzlich sind in beiden Ordnungen die Winkeldifferenzen zwischen den gelben Linien, sowie der grünen und einer gelben Linie zu bestimmen. Zum Schluss wird auch hier der Spalt verengt, bis die beiden gelben Linien jeweils in der 1. und 2. Ordnung gerade noch zu erkennen sind. Diese Spaltbreiten werden ebenfalls notiert.

4 Auswertung

4.1 Allgemeines

In Abbildung 3 ist der Aufbau und der Strahlengang für das Prisma schematisch dargestellt. Im zweiten Versuchsteil ist dies einfach durch das Gitter zu ersetzen. Die schematisch dargestellte Wellenlängenabhängige Lichtablenkung verläuft dann allerdings in die entgegengesetzte Richtung. Tabelle 1 listet die Wellenlängen, der von uns beobachteten Spektrallinien, auf und ordnet sie für dieses Protokoll eindeutigen Farbbezeichnungen zu.

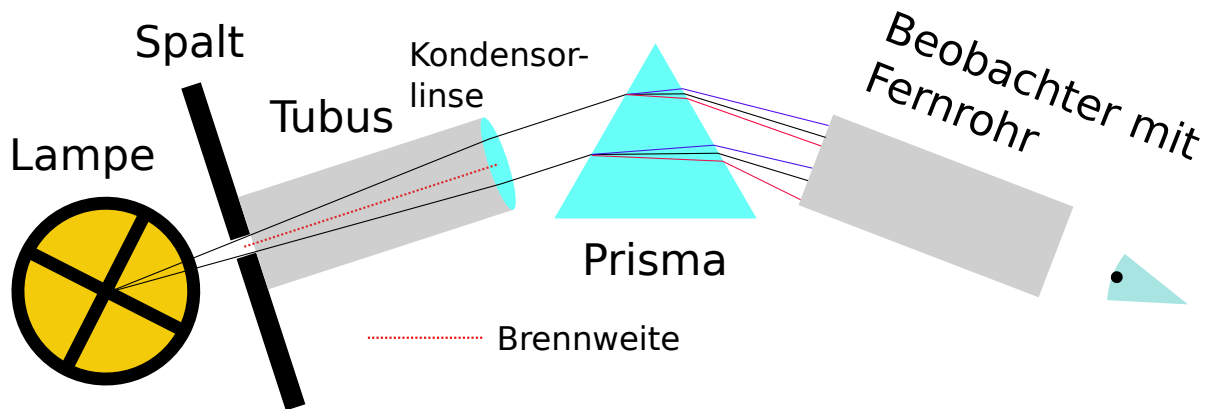


Abbildung 3: Schematische Zeichnung des Aufbaus und Lichtwegs.

Wellenlänge	Farbbezeichnung
579,07 nm	gelb1
576,96 nm	gelb2
546,07 nm	grün1
508,58 nm	grün2
404,66 nm	violett

Tabelle 1: Zuordnung der Namen der Spektrallinien zu den Wellenlängen.

4.2 Prismenspektrometer

Es soll nun die Dispersion D des Prismas im untersuchten Wellenlängenbereich bestimmt werden. Näherungsweise wird diese als konstant angenommen. Es gilt dann:

$$D = \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\sigma_D = \frac{\sqrt{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2}}{\Delta \lambda}$$

Der Brechungsindex n kann nach der Fraunhofer-Formel (Gl. 1) berechnet werden. Der Fehler ist:

$$\sigma_n = \sigma_{\delta_{\min}} \frac{\cos((\delta_{\min} + \varepsilon)/2)}{2 \sin(\varepsilon/2)}.$$

Da das Prisma am Anfang des Messungen auf den minimalen Ablenkungswinkel justiert wurde, entspricht δ_{\min} genau dem gemessenen Ablenkwinkel. Für die Dispersion ergibt sich damit: $D = (-1 \pm 0,3) \times 10^5 \frac{1}{\text{m}}$.

Das Auflösungsvermögen des Prismas bei den gelben Spektrallinien beträgt nach Formel 2:

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\text{gelb1}}{\text{gelb1} - \text{gelb2}} = 274,5.$$

Es kann auch nach Gleichung 3 berechnet werden. Der Fehler ist dann:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\sigma_s D}{\cos\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D s}{\cos\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)}\right)^2}.$$

Der Fehler σ_δ wird hier vernachlässigt, da er sehr klein ist.

In unserem Fall erweist sich die Berechnung der Spaltbreite s als schwierig, da das Licht divergent durch den Spalt mit Öffnungsdurchmesser y fällt und erst hinter dem Spalt mit der Kondensorlinse im Abstand d parallelisiert wird. Wir gehen deshalb davon aus, dass die Spaltbreite in ungefähr der Breite des auf die Linse einfallenden Lichtstrahls entspricht. Dazu schätzen wir den Abstand x der Lampe vom Spalt auf (5 ± 2) cm. Dann gilt nach Strahlensatz:

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{x+d}$$

also: $s = \frac{y(x+d)}{x}$

Mit Fehler: $\sigma_s = \sigma_x \left(-\frac{(d+x)y}{x^2} + \frac{y}{x} \right)$

Hiermit ergibt sich: $A = 15 \pm 6$. Dies ist von der Bedeutung her nicht gleichzusetzen mit dem Auflösungsvermögen nach Formel 2 (siehe 5 Diskussion).

Das maximal mögliche Auflösungsvermögen des Prismas ergibt sich, wenn die gesamte Basisbreite ausgeleuchtet wird. Diese beträgt bei dem verwendeten Prisma 3 cm. Damit ergibt sich mit obigen Formeln für A und σ_A : $A_{\max} = 3000 \pm 800$. Das entspricht in der Nähe von gelb1 und gelb2 einer kleinsten noch trennbaren Wellenlänge von 0,2 nm.

4.3 Gitterspektrometer

Aus den Ablenkungswinkeln der Emissionslinien lässt sich der Spaltabstand a des Gitters bestimmen. Es gilt:

$$a = \frac{k\lambda}{\sin(\alpha_{\max})}$$

$$\sigma_a = \sigma_{\alpha_{\max}} \frac{k\lambda \cos(\alpha_{\max})}{\sin^2(\alpha_{\max})}.$$

Es wurden in erster und zweiter Ordnung jeweils drei Emissionslinien vermessen. In Tabelle 2 sind die Mittelwerte des Spaltabstands mit Fehler des Mittelwertes, für die einzelnen Ordnungen und über alle Messwerte, dargestellt.

	Wert [$\frac{1}{m}$]	Fehler [$\frac{1}{m}$]
1. Ordnung	$1,647 \times 10^{-6}$	$0,007 \times 10^{-6}$
2. Ordnung	$1,661 \times 10^{-6}$	$0,003 \times 10^{-6}$
Gesamt	$1,655 \times 10^{-6}$	$0,005 \times 10^{-6}$

Tabelle 2: Bestimmte Spaltabstände.

Für alle nachfolgenden Berechnungen wird der Gesamtmittelwert verwendet. Es soll die Wellenlängendifferenz von gelb1 und gelb2 aus den Messwerten bestimmt werden. Die benötigten Formeln sind:

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha_{\max})a}{k} \quad (5)$$

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha_{\max}} a \cos(\alpha_{\max})}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a \sin(\alpha_{\max})}{k}\right)^2}. \quad (6)$$

Damit werden nun aus den gemessenen Winkeln die entsprechenden Wellenlängen mit Fehlern berechnet und ihre Differenz gebildet. Der Fehler der Differenz c zweier fehlerbehafteter Größen a und b beträgt $\sigma_c = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$. Es ergeben sich die in Tabelle 3 dargestellten Werte.

	Wert [nm]	Fehler [nm]
1. Ordnung	2	3
2. Ordnung	4	3
Theorie	2,11	

Tabelle 3: Wellenlängendifferenzen von gelb1 und gelb2 in 1. und 2. Ordnung.

Für das Auflösungsvermögen des Gitterspektrometers gilt nach Gleichung 4:

$$A = kN = k \frac{s}{a}$$

$$\sigma_A = k \sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a s}{a^2}\right)^2}.$$

Die erhaltenen Werte und das maximale Auflösungsvermögen (volle Ausleuchtung des Gitters) sind in Tabelle 4 zu finden. Der Fehler des maximalen Auflösungsvermögens ist so gering, da die vorher stark fehlerbehaftete Spaltbreite, jetzt exakt bekannt ist.

	Wert	Fehler
1. Ordnung	50	20
2. Ordnung	100	30
Max. 1. Ordnung	11480	31

Tabelle 4: Auflösungsvermögen des Gitters in 1. und 2. Ordnung.

Abschließend soll noch die Wellenlänge der violetten Spektrallinie bestimmt werden. aus den schon bekannten Formeln 5 und 6 ergibt sich dann das in Tabelle 5 dargestellte Ergebnis.

	Wellenlänge [nm]	Fehler [nm]
1. Ordnung	408	2
2. Ordnung	404	3
Mittelwert	406	3
Theoriewert	404,66	

Tabelle 5: Wellenlänge der violetten Spektrallinie.

5 Diskussion

Aus den Angaben im Praktikumshandbuch kann die mittlere Dispersion zwischen 589,3 nm und 486,1 nm Wellenlänge auf $-1,65 \times 10^5$ bestimmt werden. Dieser Wert liegt höher als unser Ergebnis und befindet sich nur im 3σ -Bereich. Dies ist aber zu erwarten, da die Dispersion, in Richtung kurzer Wellenlängen, nichtlinear steigt und 486,1 nm deutlich kürzer ist, als die von uns untersuchten Wellenlängen.

Die Berechnung des Auflösungsvermögens gestaltete sich bei der Auswertung der Messwerte als schwierig. Eine besondere Schwierigkeit war dabei, in welchem Rahmen mit der Beugung am Spalt gearbeitet werden müsste. Dass die berechneten Werte deutlich zu klein sind, legt so etwas nahe. Öffnet man jedoch den Spalt, um entsprechend der Beugungsformeln den Bündelquerschnitt zu verengen, lassen sich die Spektrallinien erst bei Spaltbreiten in der Größenordnung von $\lambda \cdot 10^2$ nicht mehr trennen. Es ist zweifelhaft, ob die Näherung $\lambda \sim s$ dann noch gerechtfertigt ist. Auf eine weitere Analyse der Messergebnisse wird hier verzichtet, da auf den ersten Blick klar wird, dass bei der Berechnung der Werte konzeptionelle Probleme aufgetreten sind. Schlussendlich sind wir skeptisch, ob mit diesem konkreten Aufbau des Versuches überhaupt sinnvolle Aussagen über den

Bündelquerschnitt machbar sind. Deshalb liegt das erhaltene Auflösungsvermögen von 14 viel niedriger als das theoretisch benötigte von mindestens 274. Wir können also leider keine Aussagen über das Auflösungsvermögen machen, ohne den Bündeldurchmesser genauer bestimmen zu können. Selbiges gilt natürlich auch am Gitterspektrometer. Die maximalen Auflösungsvermögen lassen sich jedoch gut vergleichen. Das verwendete Gitter hat ein dreifach höheres Auflösungsvermögen, bei kleineren Abmessungen und geringerem Gewicht

Der angegebene Spaltabstand des Gitters liegt erst im 4σ -Bereich des errechneten Spaltabstandes. Der relative Fehler ist jedoch gering. Für alle weiteren Berechnungen wurde der gemessene Wert verwendet um die Auswirkungen systematischer Fehler im Aufbau klein zu halten.

Die Werte für die Wellenlängendifferenz der gelben Doppellinien sind mit sehr hohem Fehler belegt, die bestimmte Wellenlängendifferenz ist also sehr ungenau. Trotzdem liegt der theoretische Wert mittig im 1σ -Intervall.

Die berechnete Wellenlänge der violetten Spektrallinie ist nah am Literaturwert. Dieser liegt im 1σ -Bereich. In der 2. Ordnung lag der Wert jedoch zu hoch. In der gesamten Auswertung fiel auf, dass die Werte der Wellenlängen in der 2. Ordnung immer höher waren als die der 1. Ordnung. Das lässt sich dadurch erklären, dass der Spaltabstand, der aus den Messwerten der 2. Ordnung berechnet wurde, insgesamt größer war als der der ersten Ordnung. Weil das Gitter jedoch nur einen Spaltabstand besitzt, wurde in der folgenden Auswertung mit dem Mittelwert gerechnet, der dann scheinbar zu niedrig liegt.

Literatur

- [LP] P. Schaaf, <http://lp.uni-goettingen.de/get/bigimage/> (abgerufen 27.12.2016)
- [LH] Hupe, Lukas, *Prisma*, ©LUKASARTS, Göttingen, 10.01.17
- [ZIN] W. Zinth, U. Zinth, *Optik: Lichtstrahlen - Wellen - Photonen*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag 2013