

GRUNDPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

**Versuch 5**  
**Pohlscher Resonator**

---

Praktikanten: Jonas Isensee, Lennart Jahn  
E-Mail: jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de  
l.jahn@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Bud Spencer  
Datum: 26.01.2016

Testat:
---------

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Harmonische Schwingungen . . . . .	3
2.2	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	3
2.3	Angeregte gedämpfte Schwingungen . . . . .	4
2.4	Wirbelstrombremse . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Beschreibung des Aufbaus . . . . .	5
3.2	Versuchsdurchführung . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Das logarithmische Dekrement und die Dämpfungskonstante . . . . .	7
4.2	Die ungedämpfte Eigenfrequenz . . . . .	8
4.3	Die Resonanzkurve . . . . .	8
4.4	Phasenverschiebung . . . . .	9
4.5	Resonanzfrequenz . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

---

# 1 Einleitung

Schwingungen spielen in vielen physikalischen Anwendungen eine große Rolle, vom Schwingungsfreiheitsgrad des Gases bis hin zur Radiowelle. Oft werden idealisierte, reibungsfreie harmonische Schwingungen betrachtet. In diesem Versuch geht es darum Verständnis für die leichter realisierbaren, aber weniger leicht zu beschreibenden, gedämpften und extern angeregten Schwingungen zu erlangen.

## 2 Theorie

### 2.1 Harmonische Schwingungen

Eine mechanische Schwingung ist harmonisch, wenn die verursachende Rückstellkraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist. Beim Pohlschen Resonator wird das rückstellende Drehmoment durch die Feder erzeugt, es lässt sich durch die Winkelrichtgröße  $D$  der Feder (ein äquivalent zur Federkonstante) und die Auslenkung  $\varphi$  des Rades beschreiben als  $-\varphi D$ . Das Minus entsteht, weil das Drehmoment der Auslenkung entgegen wirkt. Mit dem Drehmoment  $I$  der Drehscheibe ergibt sich aus  $I\ddot{\varphi} = M$  ( $M$  Drehmoment) als Bewegungsgleichung:

$$I\ddot{\varphi} = -\varphi D.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist nach [2] S.326:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$$

### 2.2 Gedämpfte Schwingungen

In der Realität gibt es zusätzlich zum rückstellenden Drehmoment auch immer Reibung oder Dämpfung. Das dadurch entstehende Drehmoment ist dann in der Bewegungsgleichung durch einen zusätzlichen Term zu berücksichtigen. Wir nehmen an, dass das Dämpfungsmoment proportional zu Winkelgeschwindigkeit ist und fügen deshalb noch  $-\dot{\varphi}\rho$  ein. Dabei ist  $\rho$  eine Dämpfungskonstante. Das Minus entsteht aus dem Gleichen Grund wie in 2.1. Die erweiterte Bewegungsgleichung lautet nun:

$$I\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}\rho - \varphi D$$

Die Lösung ist jetzt ( [2] S.333 )

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} (Ae^{\omega_e t} + Be^{-\omega_e t}) \quad \text{mit } \beta = \frac{\rho}{2I} \text{ und } \omega_e = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

An  $\omega_e$  ist zu erkennen, ob, und wenn ja wie, das System unter einer gewissen Dämpfung schwingt. Nur wenn  $\beta$  kleiner ist als  $\omega_0$  ergeben sich komplexe Exponenten, die für oszillierendes Verhalten der Exponentialfunktionen sorgen. Der Vorfaktor  $e^{-\beta t}$  sorgt dafür, dass die Schwingung exponentiell abklingt, das heißt, dass bei hoher Dämpfung schon nach kurzer Zeit keine Schwingung mehr stattfindet. Oder allgemein:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ . Um ein Maß für die Schnelligkeit dieser Abnahme einzuführen definiert man

$$\Lambda = \ln \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} \right) = \ln(e^{\beta T}) = \beta T \quad (1)$$

als das sogenannte Logarithmische Dekrement. Je höher dieser Wert, desto schneller klingt die Schwingung ab.  $T$  steht hierbei für die Periodendauer ( $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$ ).

## 2.3 Angeregte gedämpfte Schwingungen

Wird nun zusätzlich zur Dämpfung noch eine Anregung eingebracht, muss die Bewegungsgleichung nochmals erweitert werden. Da die Anregung von der Auslenkung und deren Ableitungen vollkommen unabhängig ist, wird die Bewegungsgleichung damit inhomogen. Im Fall des Pohlschen Resonators ist die Anregung ein periodisches Drehmoment der Form  $N \cos(\omega t)$ . Die Gleichung lautet jetzt:

$$I\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}D - \varphi D + P \cos(\omega t)$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung muss nur eine spezielle Lösung gefunden und zur Lösung der homogenen Gleichung addiert werden. Über den Ansatz  $\varphi(t) = ae^{i(\omega t - b)}$  erhält man als Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} (Ae^{i\omega_e t} + Be^{-i\omega_e t}) + \varphi_0 \cos(\omega t - \phi)$$

homogene Lösung + spezielle inhomogene Lösung

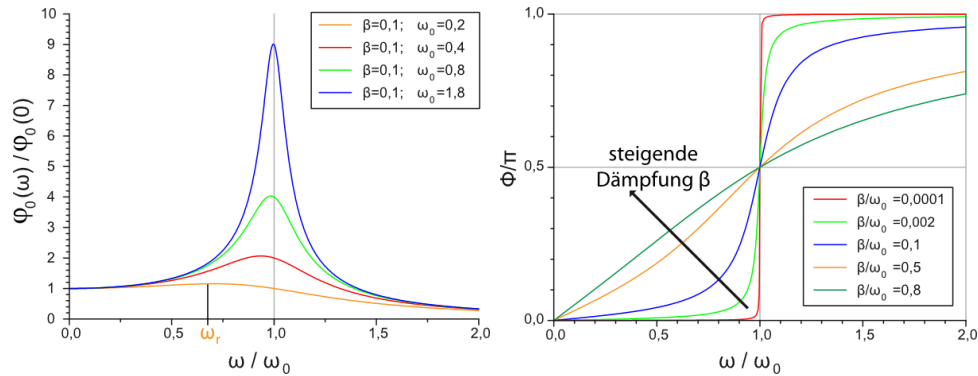
$\varphi_0$  und  $\phi$  werden später spezifiziert. An dieser Gleichung ist zu erkennen, dass das System, nachdem die Eigenschwingung abgeklungen ist, nur noch in der Anregerfrequenz schwingt. Interessant sind jetzt noch die Amplitude  $\varphi_0$  und Phasenverschiebung  $\phi$  der erzwungenen Schwingung. Die Formeln für  $\varphi_0$  und  $\phi$  lauten nach [2]S.336:

$$\varphi_0 = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (2)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - 2\beta^2} \right) \quad (3)$$

Mit  $N = \frac{P}{I}$

In Abbildung 1 ist das Verhalten von  $\varphi_0$  und  $\phi$  (jeweils normiert) für verschiedene Dämpfungen in Abhängigkeit von  $\frac{\omega}{\omega_0}$  dargestellt.



**Abbildung 1:**  $\varphi_0$  und  $\phi$  in Abhängigkeit von  $\frac{\omega}{\omega_0}$  Quelle: [4]

## 2.4 Wirbelstrombremse

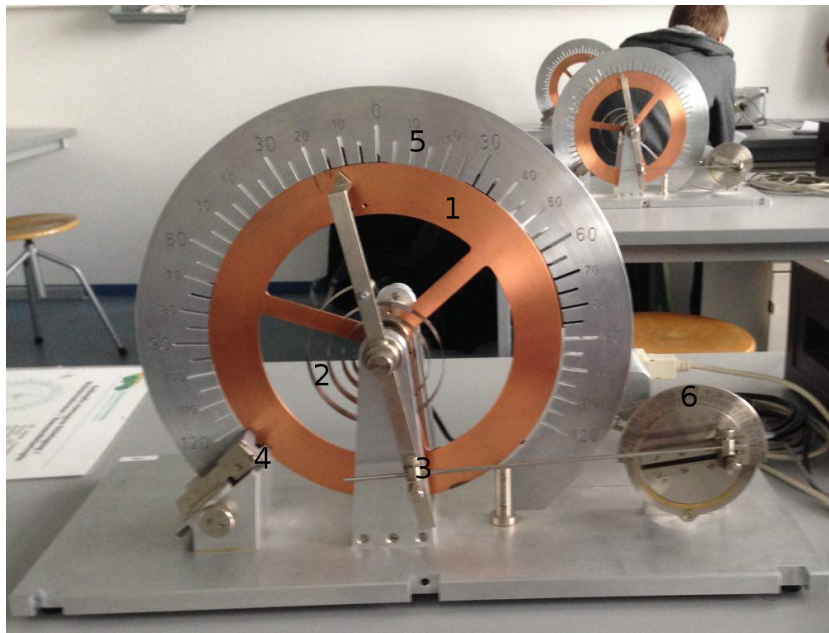
Eine Wirbelstrombremse funktioniert dadurch, dass in dem relativ zum Magnetfeld bewegten Leiter ein Strom induziert wird, der im Kreis fließt. Durch den Widerstand des Leiters kommt es zu Energieverlusten. Diese werden als Bremswirkung spürbar. Vorteil davon ist der geringe Verschleiß, da keine mechanische Reibung auftritt. Die Wirbelstrombremse wird in diesem Versuch genutzt, um eine Dämpfung einzustellen. Dazu ist sie gut geeignet, da die Bewegungsgleichungen immer von einer zur Geschwindigkeit proportionalen Kraft ausgehen. Dies ist meist nur eine Näherung, bei der Wirbelstrombremse aber tatsächlich der Fall. Außerdem ist die Bremswirkung auch noch proportional zur Schnittfläche von Magnetfeld und Leiter, was den Vergleich der Messungen erleichtert.

## 3 Durchführung

### 3.1 Beschreibung des Aufbaus

Der Versuchsaufbau besteht aus einem auf einer Achse drehbar gelagerten Rad (1) aus Kupfer. Über eine Spiralfeder (2) ist es mit dem Zeiger (3) verbunden. Auf der Winkelskala (5) kann die momentane Auslenkung des Rades und des Zeiger abgelesen werden. Über einen Exzenter (6) mit angeschlossenem Motor kann der Zeiger bewegt und damit zum Schwingen angeregt werden. Durch die verstellbare Wirbelstrombremse (4) kann, durch Vergrößern und Verkleinern der Schnittfläche mit dem Rad, die Dämpfung eingestellt werden.

Die Auswertung und Steuerung erfolgt elektronisch. Dazu ist ein Computer mit einem Messprogramm angeschlossen. Über einen an die Achse des Rades angeschlossenen Winkelmesser kann die Auslenkung bestimmt werden. Ein Schrittmotor mit elektronischer Steuerung sorgt dafür, dass der Computer die Position des Zeigers zu jedem Zeitpunkt genau kennt. Im Messprogramm ist die Frequenz des Motors frei wählbar. Zusätzlich kann die momentan verwendete Dämpfung angegeben werden.



**Abbildung 2:** Bild des Versuchsaufbaus Quelle: [3]

Eine Messung beginnt mit einer kurzen Initialisierung der Elektronik. Deshalb werden die ersten Schwingungen nicht aufgenommen. Danach erstellt der Computer automatisch einen Plot der Auslenkung über der Zeit. Der Phasenraum der Schwingung wird ebenfalls graphisch ausgegeben. Nach Ende der Messung wird eine PDF-Datei ausgegeben, in der, zusätzlich zum Plot der Auslenkung, auch Motorfrequenz und Dämpfung vermerkt sind. Die Nulldurchgänge des Zeigers sind durch vertikale Linien markiert, damit die Phasenverschiebung bestimmt werden kann. Diese Dateien sind dann zu kopieren und auszuwerten.

### 3.2 Versuchsdurchführung

Als Erstes wird das Verhalten des Systems ohne äußere Anregung untersucht. Die Auswirkungen der Dämpfung sollen im Detail betrachtet werden. Dazu wird der Zeiger über das Messprogramm in Nullauslenkung gebracht, damit sich eine möglichst symmetrische Schwingung um  $0^\circ$  auf der Winkelskala ergibt. Die Wirbelstrombremse wird auf den gewünschten Grad (0,2,4,6,8 mm) der Dämpfung eingestellt. Das Rad wird nun von Hand auf  $120^\circ$  ausgelenkt und die Messung am Computer gestartet. Nachdem sich die Messelektronik kalibriert hat wird das Rad erneut auf  $120^\circ$  ausgelenkt, damit der vollständige Schwingvorgang aufgezeichnet wird. Dies ist besonders bei Messungen mit hoher Dämpfung sehr wichtig, da nur noch sehr wenige signifikante Schwingungen stattfinden und die Messauflösung des Winkelmessers bei kleiner Auslenkung sehr grob ist. Natürlich ergibt sich auch bei 0 mm Dämpfungsgrad der Wirbelstrombremse durch an-

---

dere Reibung eine gedämpfte Schwingung.

Im zweiten Teil werden die erzwungenen Schwingungen betrachtet. Hierbei sollen besonders das Verhalten von  $\varphi_0$  und  $\phi$  nach den Formeln 2 und 3 nachvollzogen werden. Der ungedämpfte Fall wird jetzt nicht mehr betrachtet, da das Risiko der Resonanzkatastrophe (Die durch den Motor zugeführte Energie wird durch die Dämpfung nicht schnell genug abgeführt und das System schwingt immer stärker) besteht. Für jede Dämpfung (4,6,8 mm) wird das Rad nun in erzwungene Schwingung versetzt. Dazu wird für verschiedene Motorfrequenzen zwischen 150 und 600 mHz  $\varphi(t)$  aufgezeichnet. In der ersten Zeit, nach Beginn der Messung, ergibt sich noch keine gleichmäßige Schwingung, da sich Eigenschwingung und erzwungene Schwingung überlagern. Nach einer gewissen Einschwingzeit ist jedoch die Eigenschwingung vollständig abgeklungen und das System schwingt mit der eingestellten Motorfrequenz. Dies kann man im Phasendiagramm recht gut daran erkennen, dass sich dann eine gleichmäßige Ellipse ergibt. Da nur die Daten der erzwungenen Schwingung für die Auswertung relevant sind, wird die Messung nun neu gestartet. Nach einer größeren Untersuchung des Frequenzbereiches in 50 mHz Schritten wird der interessante Bereich um die vermutete Resonanzfrequenz nochmals genauer vermessen.

Während der Messungen ist immer darauf zu achten, dass keine Resonanzkatastrophe auftritt, da diese das Gerät beschädigen könnte.

## 4 Auswertung

### 4.1 Das logarithmische Dekrement und die Dämpfungskonstante

Aus den Abklingkurven des ersten Versuchsabschnitts lesen wir die Maxima aus. Für jeden einzelnen Messpunkt nehmen wir einen großzügig abgeschätzten Fehler von  $\sigma_t = 1$  Sekunde an. Aus der Zeitdifferenz zwischen dem ersten letzten Maximum berechnen wir die Periodendauer mit:

$$T = \frac{t_n - t_1}{n - 1}$$

und nach gaußscher Fehlerfortpflanzung  $\sigma_T = \frac{\sqrt{2}}{n-1}$ . Daraus ergeben sich die Eigenfrequenzen  $\omega_e$  für die verschiedenen Dämpfungen bzw. Einstellungen der Wirbelstrombremse in Tabelle 1.

Zur Berechnung des Logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  verwenden wir Formel 1. Für den Quotienten  $\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)}$  verwenden wir die ersten zwei Maxima der Abklingkurven, da diese den kleinsten relativen Fehler haben. Im Anschluss berechnen wir die Dämpfungskonstante  $\beta$  durch die Gleichung  $\Lambda = \beta T$ . Die Fehler  $\sigma_\Lambda$  und  $\sigma_\beta$  ergeben sich durch gaußsche Fehlerfortpflanzung. Die erhaltenen Werte stehen in Tabelle 2.

---

Wirbelstrombremse	Periode $T$	Eigenfrequenz $\omega_e$
0 mm	$3.13 \pm 0.21 \text{ s}$	$2.01 \pm 0.13 \frac{1}{\text{s}}$
2 mm	$3.10 \pm 0.29 \text{ s}$	$2.03 \pm 0.19 \frac{1}{\text{s}}$
4 mm	$3.07 \pm 0.48 \text{ s}$	$2.05 \pm 0.32 \frac{1}{\text{s}}$
6 mm	$3.1 \pm 1.4 \text{ s}$	$2.03 \pm 0.93 \frac{1}{\text{s}}$
8 mm	$3.1 \pm 1.4 \text{ s}$	$2.03 \pm 0.93 \frac{1}{\text{s}}$

**Tabelle 1:** Werte für  $T$  und  $\omega_e$

Wirbelstrombremse	Log. Dekrement $\Lambda$	Dämpfungskonstante $\beta$
0 mm	$0.14 \pm 0.03$	$0.0450 \pm 0.0090$
2 mm	$0.28 \pm 0.03$	$0.091 \pm 0.013$
4 mm	$0.605 \pm 0.047$	$0.197 \pm 0.034$
6 mm	$1.05 \pm 0.10$	$0.34 \pm 0.16$
8 mm	$1.72 \pm 0.22$	$0.55 \pm 0.27$

**Tabelle 2:** Werte für  $\Lambda$  und  $\beta$

## 4.2 Die ungedämpfte Eigenfrequenz

Aus den Werten des vorigen Abschnitts berechnen wir durch die Relation

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}$$

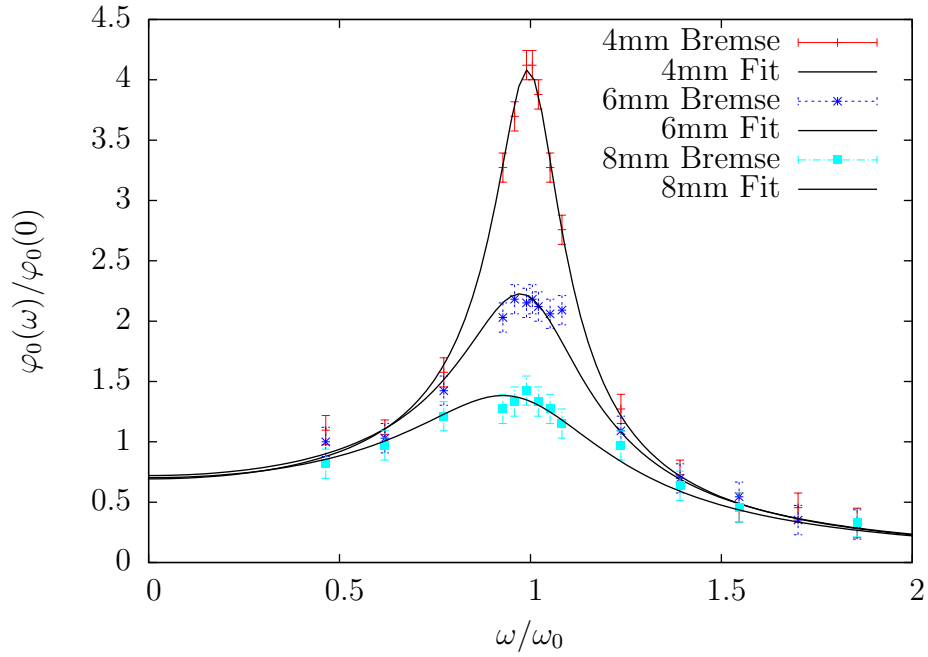
die ungedämpfte Eigenfrequenz. Das gewichtete Mittel für  $\omega_0$  über alle Dämpfungen ist  $\omega_0 = 2.03 \pm 0.20 \frac{1}{\text{s}}$ . Die Eigenfrequenz  $\omega_e$  für die Dämpfungseinstellung 0 mm ist etwas kleiner, als die Eigenfrequenz des ungedämpften Falls, liegt aber noch deutlich im Bereich des Fehlers.

## 4.3 Die Resonanzkurve

In Abbildung 3 ist die Resonanzkurve für drei verschiedene Dämpfungen aufgetragen. Dabei entspricht die X-Achse dem Verhältnis zwischen Anregungsfrequenz  $\omega$  und der in Abschnitt 4.2 berechneten Eigenfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Falls. Auf der Y-Achse ist die Amplitude aufgetragen, welche sich nach dem Einschwingprozess einstellt. Diese ist mit auf einen Wert  $\varphi_0(150\text{mHz}) = 16.5^\circ$  normiert.

Für die Fitkurven wurde Gleichung 2 über  $N$  und  $\beta$  an die Werte angepasst. Die Werte der Fit-Parameter sind in Tabelle 3 aufgelistet.





**Abbildung 3:** Frequenzgang

Dämpfung	N	$\beta$
4mm	$2.81 \pm 0.08$	$0.17 \pm 0.01$
6mm	$2.92 \pm 0.15$	$0.33 \pm 0.02$
8mm	$2.84 \pm 0.14$	$0.53 \pm 0.04$

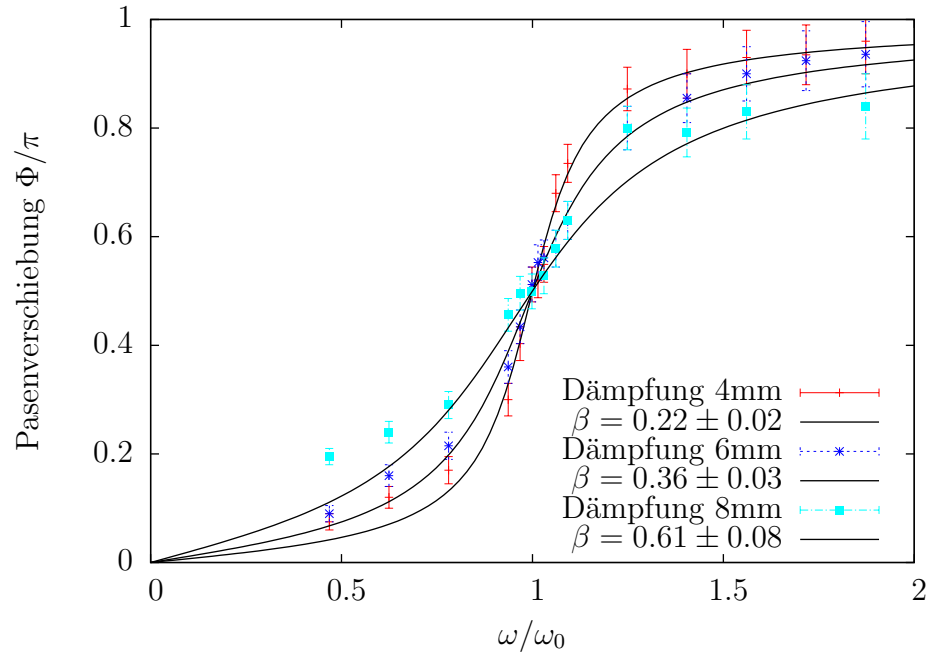
**Tabelle 3:** Fit-Parameter

#### 4.4 Phasenverschiebung

In Abbildung 4 ist die Phasenverschiebung zwischen dem Exzenter und der Schwingung dargestellt. Dabei ist die X-Achse mit  $\omega_0$  aus Abschnitt 4.2 skaliert. Die Y-Achse ist mit  $\pi$  skaliert, damit alle Werte zwischen 0 und 1 liegen. Für die Ausgleichskurven haben wir Gleichung 3 über die Dämpfungskonstante  $\beta$  an die Werte gefittet.

#### 4.5 Resonanzfrequenz

Verwendet man die ungedämpfte Eigenfrequenz  $\omega_0$  aus Abschnitt 4.2 und die Dämpfungskonstanten  $\beta$  aus Abschnitt 4.1, lässt sich ein theoretischer Wert für die Resonanzfrequenz, mit einem Fehler nach gaußscher Fehlerfortpflanzung, berechnen. Diese sind neben den gemessenen Resonanzfrequenzen, welche wir mithilfe der Fit-Parameter



**Abbildung 4:** Phasenverschiebung  $\Phi$

aus der Abbildung bestimmen, dargestellt.

Dämpfung	$\omega_r$ theoretisch	$\omega_r$ abgelesen
4mm	$2.01 \pm 0.20$	$2.02 \pm 0.20$
6mm	$1.97 \pm 0.22$	$1.98 \pm 0.21$
8mm	$1.87 \pm 0.29$	$1.89 \pm 0.23$

**Tabelle 4:** Resonanzfrequenzen

---

## 5 Diskussion

Die Werte für die Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung sollten nach theoretischer Erwartung für höhere Dämpfung kleiner werden. Dieser Zusammenhang ist aus unseren Werten nicht zu erkennen. Allerdings waren die Eigenfrequenzen bei höheren Dämpfungen, wie auch an den Fehlern zu erkennen ist, nicht mehr sehr genau zu bestimmen, weil die Anzahl der ausgeführten Schwingungen zu klein wurde. Bei 8 mm Dämpfungsgrad waren es zum Beispiel nur noch zwei. Der erwartete Wert für  $\omega_e$  würde aber wegen der deshalb immer größer werdenden Fehlerintervalle immer im Bereich der Standardabweichung liegen.

Die Werte für das Logarithmythische Dekrement und die Dämpfungskonstante sind dagegen gut. Das Logarithmische Dekrement steigt bei höherer Dämpfung deutlich an und die Dämpfung steigt ebenfalls. Wegen  $\beta = \frac{\rho}{2I}$  und  $\rho$  proportional zur Stellung der Wirbelstrombremse (siehe 2.4) erwarten wir auch  $\beta \propto \rho$ . Dieser Zusammenhang ist in den Werten gut erkennbar.

Die Graphen für  $\varphi_0$  und  $\phi$  sehen den Erwarteten Graphen (siehe Abbildung 1) sehr ähnlich und die nach den Formeln für  $\varphi_0$  und  $\phi$  daran gefitteten Graphen liegen meist gut in Fehlerintervall. Bei der höchsten Dämpfung von 8 mm ergeben sich bei der Phasenverschiebung recht ungenaue Werte. Wir vermuten, dass dies eine Auswirkung der elektronischen Messung ist, da bei kleinen Auslenkungen, wie sie bei hoher Dämpfung eben auftreten, die Auflösung des Winkelmessers zu grob ist.

Die theoretische und die abgelesene Resonanzfrequenz  $\omega_r$  stimmen ebenfalls sehr gut überein. In unseren Messreihen haben wir die Resonanzfrequenz des Systems jeweils gar nicht, oder nur ungefähr gefunden, denn es stellten sich nie Anzeichen für eine Resonanzkatastrophe oder eine besonders starke Amplitude bei einer bestimmten Frequenz ein. Durch die Interpolation über die Fits ließ sich der Wert von  $\omega_r$  aber sehr gut ablesen und war, wie durch den Vergleich mit den theoretischen Werten ersichtlich, auch sehr genau.

## Literatur

- [1] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Springer Spektrum 2015
- [2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013
- [3] J. Isensee *Ohne Titel*, 26.01.2016, Bits auf Speicherkarte, 1012x766 pixel
- [4] <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3548> (abgerufen 29.01.2016)