Grundpraktikum der Fakultät für Physik
Universität Göttingen

Versuch 14
Mikroskop

Praktikanten:	Jonas Isensee
	Lennart Jahn
E-Mail:	jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de
	l.jahn@stud.uni-goettingen.de
Betreuer:	Erwin Erlebnisgarnele
Datum:	01.12.2016

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Auswertung **3**
2.1 Strahlengang 3
2.2 Berechnung der Okularvergrößerung 3
2.3 Brennweite der Objektive 5
2.4 Auflösungsvermögen mit Glasmaßstab 5
2.5 Auflösungsvermögen mit Plexiglasstab 6

3 Diskussion **8**
3.1 Okularvergrößerung 8
3.2 Brennweiten 8
3.3 Optische Schiene 8
3.4 Glasmaßstab 8
3.5 Plexiglasstab 9

1 Einleitung

Mikroskope und andere bildvergrößernde Aufbauten, finden in zahlreichen Gebieten des Alltags und der Wissenschaft Anwendung. Dieser Versuch soll dazu dienen, einige grundlegende Eigenschaften der Linsenoptik zu untersuchen.

2 Auswertung

2.1 Strahlengang

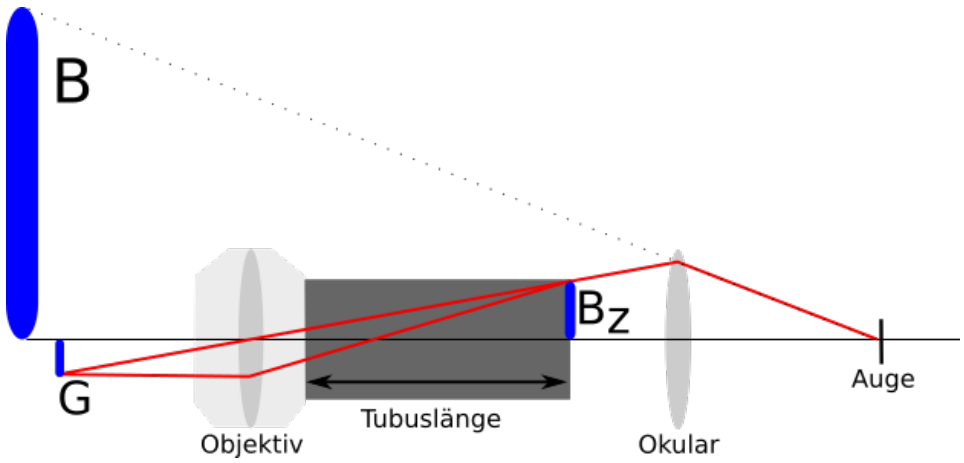

Abbildung 1: Dies ist ein schematischer Strahlengang des ersten Versuchs. Mit G ist der mikroskopierte Gegenstand bezeichnet. Im Fokuspunkt des Objektivs ist eine Mattscheibe, auf die das Zwischenbild B_z projeziert wird. Alternativ wird das Licht vom Okular auf den Punkt des Auges fokussiert. Dort sieht der Betrachter ein erneut vergrößertes Bild des Gegenstands. Dies ist verdeutlicht durch die Verlängerung der Strahlen auf den Abstand von G zum Auge. Das Bild B des Gegenstands ist dort um ein Vielfaches größer.

2.2 Berechnung der Okularvergrößerung

In diesem Abschnitt soll die Vergrößerung des Okulars des Mikroskops bestimmt werden. Dafür werden zunächst die Gesamtvergrößerung des Mikroskops, sowie die Vergrößerung der Objektive berechnet. Daraus lässt sich dann mit der Relation

$$V_{\text{gesamt}} = V_{\text{Okular}} V_{\text{Objektiv}}$$

die Okularvergrößerung bestimmen.

Gesamtvergrößerung Für die Vergrößerung V des Mikroskops gilt die einfache Gleichung:

$$V = \frac{B}{G}, \tag{1}$$

wobei G die Größe des Objekts und B die Größe des Bildes ist. Das Objekt war in diesem Fall ein Objektmikrometer mit einer Skalierung von $1\,\mathrm{Skt} \mathrel{\hat{=}} 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Da B und G zusammen gemessen werden, und im Folgenden nur der Quotient von Bedeutung ist, wird vereinfachend nur B als fehlerbehaftet angenommen und durch $\sigma_B = 2\,\mathrm{mm}$ abgeschätzt. Die Unsicherheit der Vergrößerung ergibt sich einfach durch:

$$\sigma_V = \frac{\sigma_B}{G}.$$

Schließlich muss noch das arithmetische Mittel der einzelnen Ergebnisse für V gebildet werden. Der Fehler dieses Mittelwerts wird mit dem Maximum folgender beider Ausdrücke abgeschätzt:

$$\sigma_{V,\text{Fehlerfort.}} = \frac{\sigma_V}{\sqrt{n}} \qquad \sigma_{V,\text{arith.Mittel}} = t_P \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (V_i - \bar{V})^2}.$$

Dabei ist $n = 3$ die Anzahl der Messwerte, t_P der Student t Faktor und $\bar{V}$ der Mittelwert von V. Der linke Ausdruck folgt aus Fehlerfortpflanzung für den Mittelwert und der rechte Ausdruck wird für statistisch verteilte Werte verwendet.

Objektivvergrößerung Als nächstes wird die Vergrößerung der beiden Objektive berechnet, die als $\times 10$ und $\times 40$ angegeben sind. Die Berechnung ist vollständig analog zum vorherigen Schritt. Der Unterschied lag in der Messung, denn hier wurde das Bild direkt auf eine Mattscheibe projeziert und dann gemessen.

Okularvergrößerung Die Okularvergrößerung lässt sich nun durch

$$V_{\text{Okular}} = \frac{V_{\text{gesamt}}}{V_{\text{Objektiv}}}$$

berechnen und die Unsicherheit ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{V,\text{Okular}} = \sqrt{\frac{\sigma_{V,\text{ges}}^2}{V_{\text{obj}}^2} + \sigma_{V,\text{obj}}^2 \left(\frac{V_{\text{ges}}}{V_{\text{obj}}^2}\right)^2}.$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

Objektiv	V_{gesamt}	V_{Objektiv}	V_{Okular}
$\times 10$	110 ± 3	10.6 ± 0.3	10.5 ± 0.3
$\times 40$	448 ± 6	41 ± 2	11.0 ± 0.4

Tabelle 1: Dargestellt sind hier die gemessenen Vergrößerungen, sowie die daraus berechnete Okularvergrößerung für zwei verschiedene Objektive.

2.3 Brennweite der Objektive

Nun soll die Brennweite f der beiden Objektive bestimmt werden. Dafür wurden zwei Tubi mit verschiedenen Längen verwendet. Die jeweilige Vergrößerung des Bildes auf der Mattscheibe berechnet sich wieder nach Formel 1 und der dazugehörigen Fehlerrechnung. Die Brennweite des Objektivs lässt sich dann mit folgender Formel berechnen:

$$f = \frac{\Delta t}{V_{\text{lang}} - V_{\text{kurz}}}. \tag{2}$$

Dabei ist Δt die Differenz der Tubuslängen und V_{lang}, V_{kurz} die Vergrößerung auf der Mattscheibe des langen bzw. kurzen Tubus. Die Tubuslängen wurden mit einem Messschieber sehr genau bestimmt und ihre Fehler können gegenüber der Unsicherheit der Vergrößerung vernachlässigt werden, da diese auf Freihhand-Messungen beruht. Dann berechnet sich der Fehler der Brennweite nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung durch:

$$\sigma_f = \sqrt{(\sigma^2_{V_{\text{lang}}} + \sigma^2_{V_{\text{kurz}}}) \frac{\Delta t^2}{(V_{\text{lang}} - V_{\text{kurz}})^4}}.$$

Die Ergebnisse für die Brennweiten sind in Tabelle 2 dargestellt.

Objektiv	V_{kurz}	V_{lang}	f
$\times 10$	8.6 ± 0.2	13.3 ± 0.3	17 ± 2 mm
$\times 40$	34 ± 3	53 ± 1	4.2 ± 0.7 mm

Tabelle 2: Aufgelistet sind die Vergrößerungen der beiden Objektive auf den Mattscheiben des kurzen sowie des langen Tubus. Dazu ist die sich daraus ergebende Brennweite berechnet.

2.4 Auflösungsvermögen mit Glasmaßstab

Der Aufbau wird durch das Schließen des Spaltes so eingestellt, dass die Skala des Glasmaßstabes gerade nicht mehr aufgelöst wird. Die Skalenteile sind laut Aufschrift auf dem

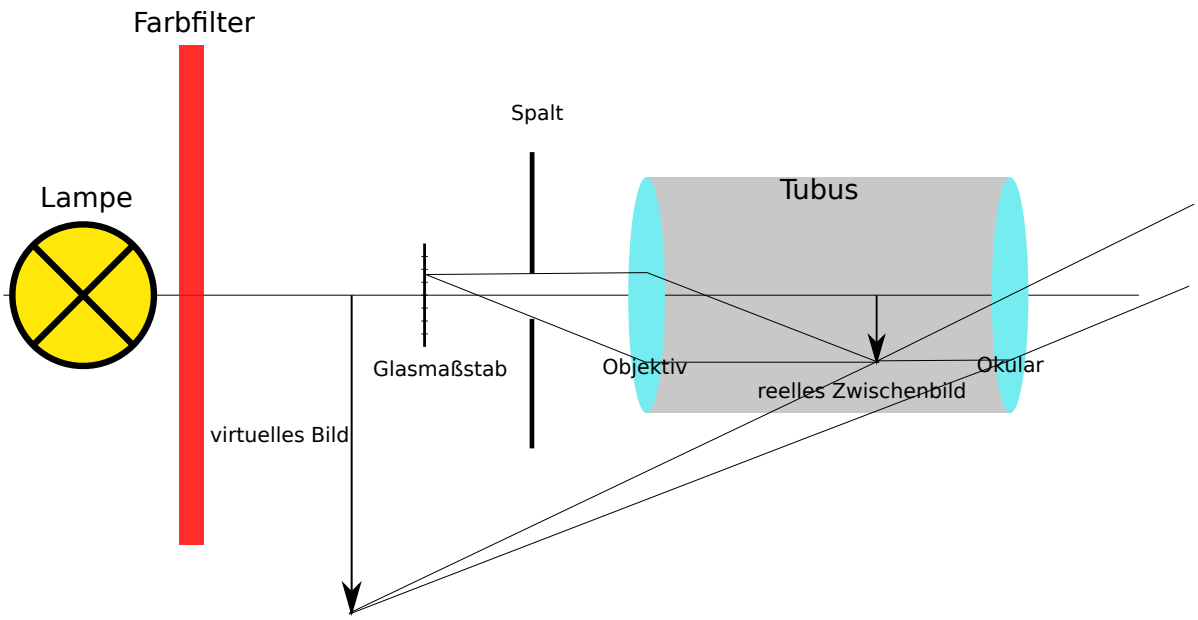

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Aufbaus zu 2.4.

Glasmaßstab genau $a = 0.1\,\mathrm{mm}$. Für das Auflösungsvermögen A erhält man:

$$A = \frac{1}{a} = 10\,/\mathrm{mm}$$

Die Spaltbreite wird, mit dem durch einen Mikrometertrieb verstellbaren Tubus, vermessen. Um den Fehler durch den wackligen Mikrometertrieb klein zu halten, wird mehrmals gemessen. Der Mittelwert der Spaltbreite b mit Fehler beträgt $0.4 \pm 0.04\,\mathrm{mm}$. Der Abstand d vom Spalt zum Glasmaßstab beträgt $6\,\mathrm{cm}$, wegen der schlechten Ablesbarkeit wird der Fehler auf $\pm 0.25\,\mathrm{cm}$ geschätzt. Der Farbfilter lässt Licht der Wellenlänge $\lambda = 650\,\mathrm{nm}$ durch. Für das Auflösungsvermögen folgt dann:

$$A = \frac{b}{d\lambda} = (10 \pm 1)\,/\mathrm{mm}.$$

Der Fehler kommt aus der Fehlerfortpflanzung, die da lautet:

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_b^2 \frac{1}{d^2\lambda^2} + \sigma_d^2 \frac{b^2}{d^4\lambda^2}}.$$

2.5 Auflösungsvermögen mit Plexiglasstab

Nachdem die Apparatur auf die vordere Ebene des Plexiglasstabes fokussiert wurde, wird das Okular entfernt und durch eine Lochblende in der Ebene des Zwischenbildes ersetzt. Über die Skala auf der Rückseite des Plexiglasstabes, wird die Breite d des sichtbaren

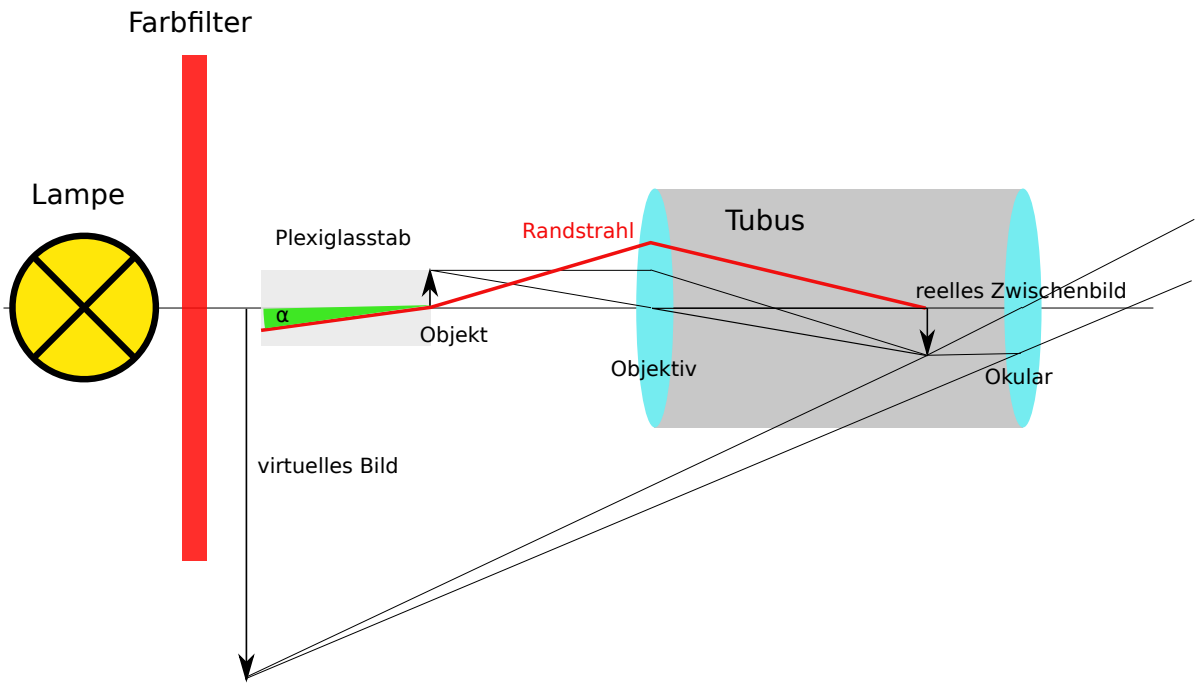

Abbildung 3: Schematische Darstellung des Aufbaus zu 2.5.

Bereiches gemessen. Sie beträgt 0.5 mm. Damit kann der Winkel α, des Randstrahls mit der optischen Achse, bestimmt werden, der gerade noch in den Tubus eintritt. Der Sinus von α entspricht dann $d/2$ geteilt durch die Länge der Hypotenuse, die mit dem Satz von Pythagoras leicht zu $\sqrt{L^2 + d^2/4}$ bestimmt werden kann. Dabei ist L die Länge des Stabes. Für die Numerische Apertur N gilt dann:

$$N = n \sin(\alpha) = n \frac{d/2}{\sqrt{L^2 + d^2/4}}.$$

Daraus lässt sich das Auflösungsvermögen zu

$$A = \frac{N}{\lambda} = \frac{n \sin(\alpha)}{\lambda} = \frac{n\, d/2}{\lambda \sqrt{L^2 + d^2/4}}$$

bestimmen. Der Fehler,

$$\sigma_A = \sigma_d \frac{n}{2\lambda} \left| \frac{1}{\sqrt{L^2 + d^2/4}} - \frac{d^2}{4} \frac{1}{\sqrt{L^2 + d^2/4}^3} \right|,$$

ergibt sich aus der Fehlerfortplanzung. Das Ergebnis für das Auflösungsvermögen lautet also $A = (114 \pm 12)/\mathrm{mm}$.

3 Diskussion

3.1 Okularvergrößerung

In Abschnitt 2.2 wurde die Okularvergrößerung bestimmt. Es fällt auf, dass die Ergebnisse für die zwei verschiedenen Objektive nur in einer 2σ Umgebung voneinander liegen. Das liegt unserer Einschätzung nach an verschiedenen Problemen mit der Messmethode. Zum einen ließen sich die Bild- und Gegenstands-Größen besonders für Brillenträger schlecht ablesen. Zum Anderen war auch die Zwischenbildgröße nur schwer zu bestimmen. Durch vorhalten des Messschiebers an die Mattscheibe ließ sich ein Parallaxen-Effekt nicht vermeiden. Außerdem musste bei jeder Messung die Mattscheibe neu in den Fokuspunkt geschoben werden, da die Mattscheibe aber sehr klein war, ließ sich dieser Punkt nur schwerlich genau finden. Aus diesen Gründen haben wir die Unsicherheiten der Messwerte schon während der Versuchsdurchführung großzügig abgeschätzt.

3.2 Brennweiten

Die Art der Messungen für die Bestimmung der Brennweiten der Objektive unterscheidet sich von den vorherigen Messungen nur wenig. Daher traten im wesentlichen die selben Schwierigkeiten und Probleme beim Messen auf. Dennoch sind die Ergebnisse konsistent. Ein weiterer Blick auf Formel 2 zeigt, dass die Brennweite $f \propto {}^{1}\!/v_{\text{Objektiv}}$ reziprok proportional zur Vergrößerung ist. Nun ist die Vergrößerung des zweiten Objektives viermal größer als die des ersten. Damit liegen die Brennweiten $4 \cdot f_{\times 40} \approx f_{\times 10}$ in ihren gegenseitigen 1σ Intervallen.

3.3 Optische Schiene

Das Mikroskop auf der optischen Schiene ist alt und dreckig. Die Auflösung ist durch die Schlieren auf dem Objektiv schon stark begrenzt. Der Mikrometertrieb ist nicht mehr sehr exakt, er wackelt etwas und hat etwas toten Gang. Neben der Schiene liegt ein Maßstab, es ist jedoch sehr schwer, damit Abstände auf der optischen Schiene zu bestimmen, da alle verwendeten Objekte auf Stative montiert sind und sich sehr große Paralaxenfehler ergeben. Weiterhin ist nicht klar erkennbar, an welcher Position sich Spalt und Glasmaßstab relativ zu ihren Halterungen befinden.
Aus diesen Gründen wurden in 2.4 und 2.5 alle Fehler großzügig abgeschätzt.

3.4 Glasmaßstab

Das Auflösungsvermögen des Mikroskops wird hier durch das Schließen des Spaltes künstlich eingeschränkt. Es soll dann auf einem anderen Weg verifiziert werden, dass sich tatsächlich nur noch dieses eingeschränkte Auflösungsvermögen ergibt. Diese Methode bestimmt natürlich nicht das wahre Auflösungsvermögen des Mikroskops, ist jedoch gut

geeignet um die Messmethode beurteilen zu können, da ein klarer Vergleich möglich ist.

Das exakte Ausrichten aller Objekte auf der Schiene nahm viel Zeit in Anspruch. Nachdem der Glasmaßstab schließlich scharfgestellt war, erwies es sich als schwierig, zu entscheiden, bei welchem Spaltdurchmesser die Skala nicht mehr aufgelöst wird, da das Bild natürlich immer dunkler wurde und die Skala wegen der dreckigen Linsen sowieso nie ganz klar zu sehen war. Wir wählten dann einen Durchmesser, bei dem die Striche noch gerade vom Hintergrund zu unterscheiden waren, selbst aber schon stark verschwammen.

Der berechnete Wert für das Auflösungsvermögen stimmt mit dem künstlich eingestellten überein. Die Messmethode ist also gut geeignet um das Auflösungsvermögen eines Mikroskops zu bestimmen. Der Nachteil ist natürlich, dass man, wenn man ein reales Mikroskop vermessen möchte, ein noch besseres Mikroskop braucht, um dessen Auflösungsvermögen künstlich einschränken zu können.

3.5 Plexiglasstab

In diesem Versuchsteil sollte nun das tatsächliche Auflösungsvermögen des Mikroskops bestimmt werden.
Die Messung war einfach, da diesmal nicht lange nach der richtigen Konfiguration der Schiene gesucht werden musste. Weiterhin half deutlich, das die eingesteckte Lochblende automatisch an der richtigen Stelle saß. Das Ablesen der Skala am Ende des Plexiglasstab war ebenfalls leichter, als zu entscheiden, ob der Glasmaßstab noch aufgelöst wird.
Das tatsächliche Auflösungsvermögen des Mikroskops ist um eine Größenordnung größer als das Eingeschränkte aus 2.4. Das scheint ein sinnvoller Wert zu sein, es fehlt leider ein Vergleich, da über das verwendete Mikroskop so gut wie nichts bekannt ist.
Die Messmethode ist praktikabler als die aus 2.4, da sie einfacher durchzuführen ist und fast jedes moderne Mikroskop einen austauschbaren Tubus besitzt, der einfach kurz gegen eine Lochblende getauscht werden kann.