Grundpraktikum der Fakultät für Physik,
Universität Göttingen

Versuch 2
Kreiselpräzession

Praktikanten:	Jonas Isensee, Lennart Jahn
E-Mail:	jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de
	l.jahn@stud.uni-goettingen.de
Betreuer:	Pietro Lombardi

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theorie **3**
2.1 Trägheitsmoment 3
2.2 Das physikalische Pendel 3
2.3 Kreisel 4
2.4 Herleitung Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit 5

3 Durchführung **6**
3.1 Trägheitsmoment durch physikalisches Pendel 6
3.2 Präzession 7
3.3 Nutation 8

4 Auswertung **9**
4.1 Trägheitsmoment 9
4.2 Trägheitsmoment aus Präzession 9
4.3 Nutation 11

5 Diskussion **11**
5.1 Vergleich der verschiedenen Trägheitsmomente 11
5.2 Linearer Zusammenhang der Nutation und Rotation 12

Literatur **12**

1 Einleitung

In diesem Versuch untersuchen wir die Nutation und Präzession von einem Kreisel. Die Prinzipien, die dabei zu tragen kommen, sind interessant zum Verständnis von Rotationen ohne feste Achsen. So etwas findet man zum Beispiel, wenn man die Rotationen und Umlaufbahnen von Planeten und Monden betrachtet.

2 Theorie

2.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment bei Rotationsbewegungen funktioniert analog zur trägen Masse bei Translationsbewegungen. Allgemein ist es durch folgendes Integral definiert:

$$I = \sum \mathrm{d}m_i r_i^{\perp 2} = \int r^{\perp 2} \rho \mathrm{dV}$$

mit $r_i^{\perp}$ dem Abstand des Massenteils $\mathrm{d}m_i$ zur Rotationsachse. Betrachtet man eine Rotation um eine Achse A, die parallel zur Schwerpunktachse A_s ist, so gilt der steinersche Satz:

$$I_A = I_{A_S} + M\vec{a}^2 \tag{1}$$

wobei $\vec{a}$ dem Verschiebungsvektor zwischen A und A_s entspricht. Formel aus [2] S.132-138

2.2 Das physikalische Pendel

Ist ein starrer Körper um eine Achse mit Abstand l zu seinem Schwerpunkt drehbar gelagert, bildet er ein physikalisches Pendel. Wird er aus seiner Ruhelage ausgelenkt, beginnt er, durch die Schwerkraft als Rückstellkraft, zu schwingen. Für kleine Auslenkungen φ, in denen die Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) = \varphi$ gilt (bis ungefähr 10°), kann seine Bewegungsgleichung bei Masse m und Trägheitsmoment I beschrieben werden als

$$I\ddot{\varphi} = -lmg\varphi$$

Daraus ergibt sich nach [1] S.86-87 eine Schwingungsdauer,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{lmg}}$$

über die sich das Trägheitsmoment bestimmen lässt als:

$$I = \frac{T^2 lmg}{4\pi^2} \tag{2}$$

2.3 Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der nur in einem Punkt fixiert ist. Daraus ergeben sich drei Freiheitsgrade für seine Rotation. Seine Bewegung wird mit der eulerschen Kreiselgleichung beschrieben:

$$\left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}\right)_{Raum} = \left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}\right)_{Körper} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Aus [1] S.90/91.

Anders als bei der herkömmlichen Bewegungsgleichung für Rotationen, gilt diese für ein raumfestes Bezugssystem. Bei dieser Transformation entsteht der sogenannte Coriolisterm. Die drei Freiheitsgrade zeigen sich durch die verschiedenen möglichen Rotationen des Kreisels. Er kann um seine Figurenachse rotieren, welche zugleich Hauptträgheitsachse ist. Wirkt ein Drehmoment horizontal orthogonal zur Impulsachse, wie in Abb. 1, so kann sich der Betrag des Impulses nicht ändern. Stattdessen präzediert die Impulsachse mit dem Kreisel um den Fixierpunkt.

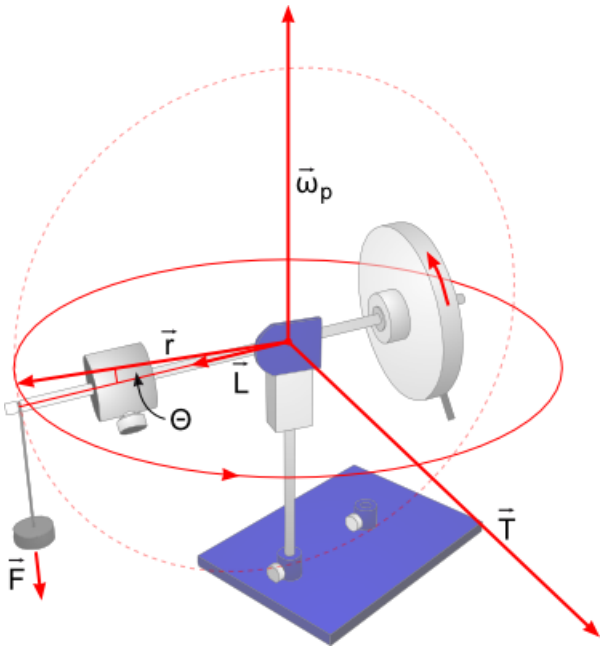

Abbildung 1: Vektorielle Darstellung der wirkenden Größen. Quelle: [3]

Wird die Figurenachse angestoßen, ändert sich die momentane Drehachse. Das erzeugt eine Nutationsbewegung der Figurenachse und der momentanten Drehachse um die raumfeste Impulsachse. Dabei läuft die Figurenachse, wie in Abb. 2, auf dem Nutationskegel entlang, während die momentane Drehachse auf dem sog. Rastpolkegel um

die Impulsachse rotiert. Alternativ lässt sich die Bewegung der Figurenachse auch mit dem Gangpolkegel beschreiben, welcher um den Rastpolkegel rollt.

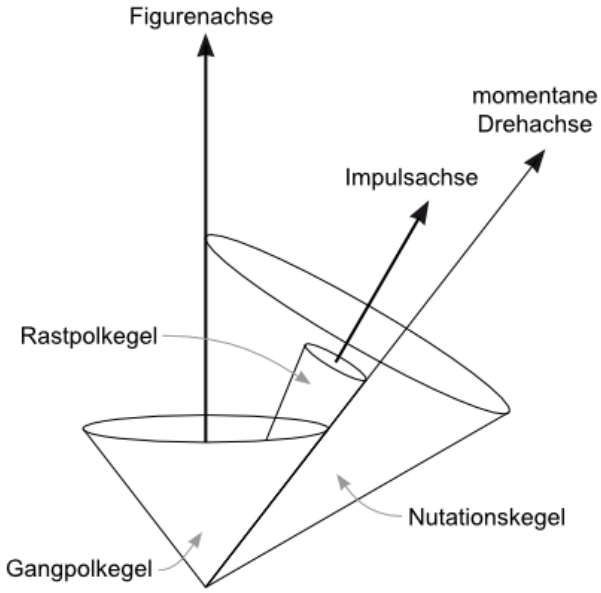

Abbildung 2: Skizze zur Bewegung der Achsen bei der Nutation. Quelle: [3]

2.4 Herleitung Trägheitsmoment aus der Präzessionsgeschwindigkeit

Die Präzessionsgeschwindigkeit hängt von verschiedenen Faktoren ab. Zunächst muss der Drehimpuls L_K des Kreisels bestimmt werden. Dafür gilt:

$$\vec{L}_K = I\vec{\omega}_K = \frac{1}{2} m_K r_K^2 \vec{\omega}_K$$

mit m_K der Masse, r_K dem Radius und $\vec{\omega}_K$ der Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels. Auf den Kreisel wirkt das Drehmoment $\vec{D}_z$ des Zusatzgewichts. Das berechnet sich mit der Formel:

$$\vec{D}_z = \vec{F}_G \times \vec{r}_z$$
$$D_z = m_z g r_z sin\theta$$

wobei m_z und r_z die Masse und der Abstand zum Fixierpunkt sind. Durch das Zusatzgewicht wird, wie in Abb. 1, die Figuren- und Rotationsachse des Kreisels um den Winkel θ gekippt. Für die Präzessionsgeschwindigkeit gilt dann folgende Gleichung:

$$\vec{D}_z = \vec{\omega}_P \times \vec{L}_K$$
$$D_z = \omega_P L_K sin\theta$$

Daraus folgt dann für das Trägheitsmoment I_K:

$$\begin{aligned} m_z g r_z sin\theta &= \omega_P I_K \omega_K sin\theta \\ I_K &= \frac{m_z g r_z}{\omega_P \omega_K}. \end{aligned} \tag{3}$$

3 Durchführung

Der Versuch besteht aus zwei wesentlichen Teilen, der Präzession und der Nutation. Mithilfe von Zusatzgewichten wird ein Drehmoment auf den rotierenden Kreisel ausgeübt, was eine Präzession hervorruft. Aus der Umlaufzeit wird dann das Trägheitmoment berechnet. Für die Nutation wird der Kreisel beschleunigt und dann angestoßen. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen der Rotationsfrequenz des Rades und der Nutationsfrequenz untersucht.

3.1 Trägheitsmoment durch physikalisches Pendel

Zunächst bestimmen wir die für die Rechnung relevanten Eigenschaften des Kreisels. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments des Kreisels um die horizontale Achse wird, wie in Abb. 3, die Stange zunächst fixiert und dann der Kreisel mit Hilfe eines Zusatzgewichts zu einem physikalischen Pendel umfunktioniert. Dafür schrauben wir das Zusatzgewicht in das Gewinde am Rand des Kreisels. Um die Kleinwinkelnäherung verwenden zu können, achten wir darauf, nur mit kleinen Auslenkungen zu arbeiten. Die Schwingungsdauer messen wir gemittelt über zehn Schwingungen mit einer Stoppuhr. Anschließend wiederholen wir das Experiment mit dem Zusatzgewicht an der gegenüberliegenden Seite des Kreisels, um den Fehler durch eventuelle Unregelmäßigkeiten im Kreisel zu verringern.

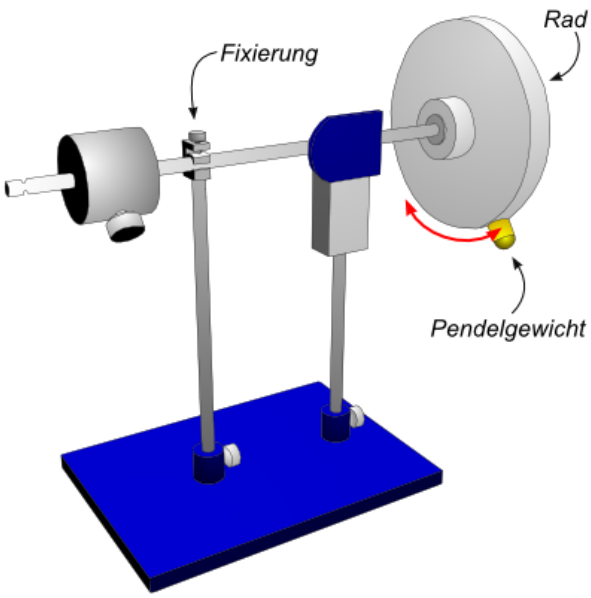

Abbildung 3: Aufbau zum physikalischen Pendel. Quelle: [3]

Anschließend notieren bzw. messen wir die Massen der Gewichte, die Stablänge und die Maße des Ausgleichgewichts.

3.2 Präzession

Nun wird die Einspannung entfernt und der Kreisel mithilfe des Ausgleichgewichts in Waage gebracht. Der Abstand wird ebenfalls notiert. Jetzt wird der Kreisel mit einer Schnur beschleunigt und dann mit der Lichtschranke seine Rotationsperiode, wie in Abb. 4, gemessen. Wir hängen ein Gewicht an das Ende des Stabes, wie in Abb. 5, und erzeugen so eine Präzession, deren Rotationsperiode wir mit einer Stoppuhr bestimmen. Diesen Schritt machen wir viermal ohne den Kreisel anzuhalten, um die Periode der Präzession in Abhängigkeit von der Rotation des Kreisels zu untersuchen. Im Anschluss wiederholen wir diese Schritte für zwei weitere Zusatzgewichte.

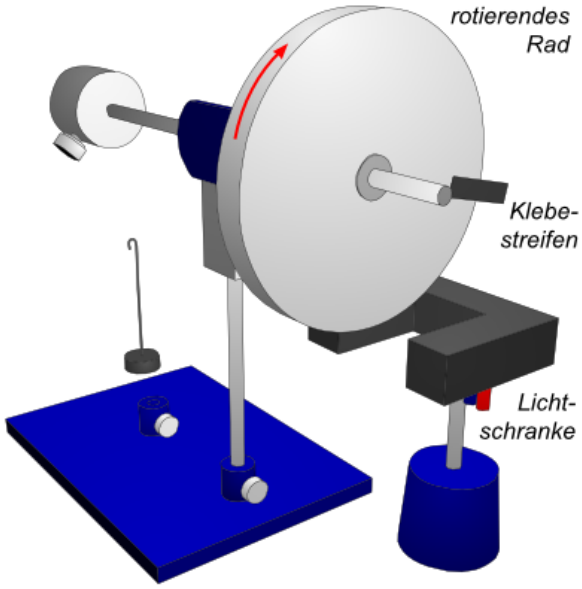

Abbildung 4: Aufbau zur Bestimmung der Umlaufzeit. Quelle: [3]

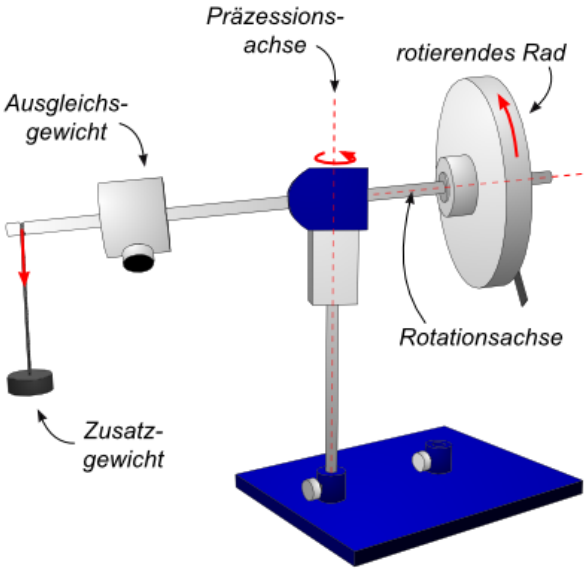

Abbildung 5: Präzession durch Zusatzgewicht. Quelle: [3]

3.3 Nutation

Zunächst stellen wir sicher, dass der Kreisel noch immer in Waage ist und versetzen ihn mit der Schnur in schnelle Rotation. Anschließend geben wir dem Ende des Stabes einen Stoß und verändern damit die momentane Rotationsachse. Dadurch entsteht eine

Nutation der Drehachse, welche wir über zehn Perioden gemittelt mit einer Stoppuhr messen. Danach beenden wir die Nutation, indem wir die Stange festhalten, ohne den Kreisel zu berühren. Dann messen wir die Rotationsperiode des Kreisels erneut mit der Lichtschranke. Diese Schritte wiederholen wir vier mal, um Nutationsperioden für vier verschiedene Rotationsperioden des Kreisels zu messen.

4 Auswertung

4.1 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment des Rades um die horizontale und vertikale Achse lässt sich durch allgemeine Formeln berechnen. Hierfür und für den weiteren Berechnungen haben wir die angegebenen Werte für den Kreisel als Fehlerfrei angenommen. Die Werte sind in Tabelle 1 dargestellt. Außerdem lässt sich das Trägheitsmoment auch mithilfe des physikalischen Pendels berechnen. Dafür haben wir den Fehler der Angaben des Rades als vernachlässigbar betrachtet und mit folgendem Fehler gerechnet:

Achse	Formel	Trägheitsmoment I
Horizontal	$\frac{1}{2}MR^2$	$9.49 \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$
Vertikal durch SP	$\frac{1}{4}MR^2$	$4.08 \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$
Vertikal durch Fixierpunkt	$\frac{1}{4}MR^2 + 2MR^2_{Abstand}$	$47.18 \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$

Tabelle 1: Trägheitsmomente - Formeln aus [1] S.80

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{2Tlmg}{4\pi^2}\right)^2 + \sigma_l^2 \left(\frac{T^2mg}{4\pi^2}\right)^2}.$$

Dadurch ergibt sich mit Formel 2 der Wert $I = (9.04 \pm 0.063) \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$.

4.2 Trägheitsmoment aus Präzession

In Abb. 6 haben wir die gemessenen Präzessionsfrequenzen über der Reziproken Kreiselrotationsfrequenz für die verschiedenen Gewichte aufgetragen. Dabei ist der lineare Zusammenhang zwischen ω_P und $\frac{1}{\omega_R}$ gut zu erkennen.

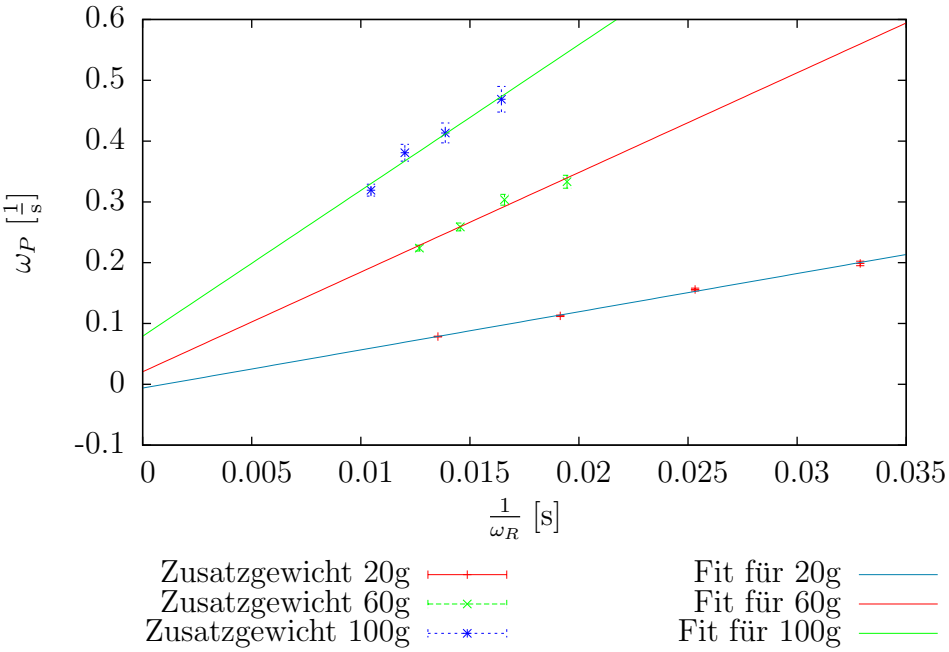

Abbildung 6: Präzession über Rotation für unterschiedliche Zusatzgewichte

Im folgenden betrachten wir die Masse des Zusatzgewichtes als Fehlerfrei, da wir den Fehler gegenüber unserer Zeitmessungen als insignifikant annehmen. Für die Fehlerrechnung ergibt sich dann aus Formel 3 folgende Formel:

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma_{\omega_P}\left(\frac{m_z g r_z}{\omega_P^2 \omega_K}\right)^2 + \sigma_{\omega_K}\left(\frac{m_z g r_z}{\omega_P \omega_K^2}\right)^2 + \sigma_{r_z}\left(\frac{m_z g}{\omega_P \omega_K}\right)^2}.$$

In Tabelle 2 sind die aus den Rotations- und Präzessionsfrequenzen bestimmten Werte für das Trägheitsmoment des Rades dargestellt.

Zusatzgewicht [g]	I [kgm^2]	σ_I [kgm^2]
20	8,9$\times 10^{-3}$	0.2$\times 10^{-3}$
60	9.0$\times 10^{-3}$	0.2$\times 10^{-3}$
100	8.8$\times 10^{-3}$	0.3$\times 10^{-3}$

Tabelle 2: Trägheitsmoment aus Präzession

4.3 Nutation

Diagramm 7 stellt die gemessene Nutationsfrequenz über der jeweiligen Rotationsfrequenz dar. Mit Gnuplot wurde ein Fit auf diese Werte berechnet, der den linearen Zusammenhang eindeutig bestätigt. Als Steigung der Gerade ergibt sich a=(0.153±0.002).

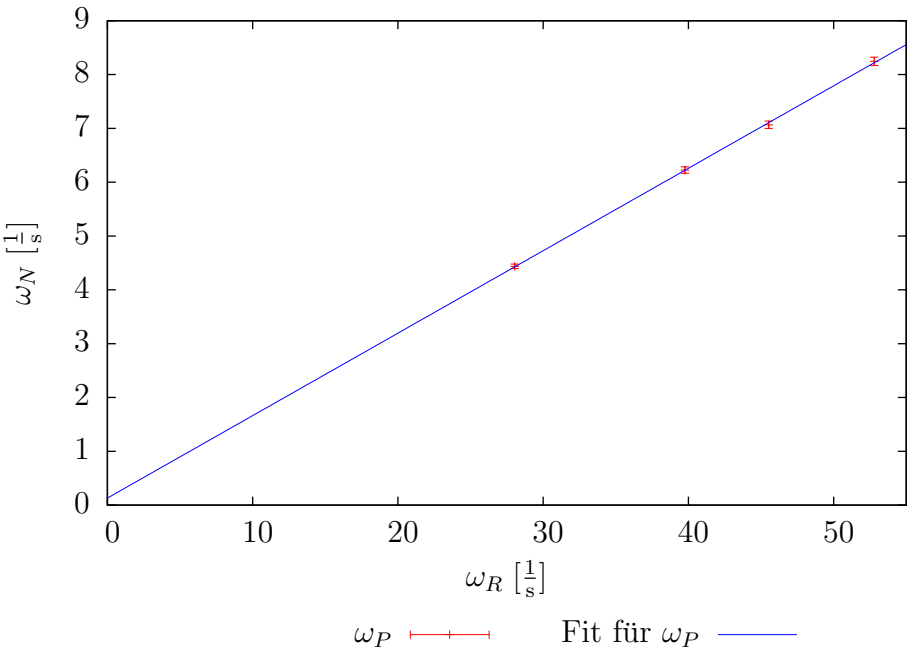

Abbildung 7: Nutation in Abhängigkeit von Rotation

5 Diskussion

5.1 Vergleich der verschiedenen Trägheitsmomente

Vergleicht man die Werte für das Trägheitsmoment des Kreisels, die wir in Abschnitt 4.1 mit dem physikalischen Pendel und in Abschnitt 4.2 aus der Kreiselpräzession bestimmt haben, zeigt sich, dass die experimentell bestimmten Werte im Rahmen ihrer Unsicherheiten miteinander übereinstimmen. Der Formelwert aus Abschnitt 4.1 hingegen, welchen wir als Fehlerfrei angenommen hatten, ist etwa 5% größer als die anderen Werte. Das deutet auf einen systematischen Fehler hin, der alle Messungen gleichermaßen beeinflusst hat. Eine mögliche Fehlerquelle, die wir in unseren Rechnungen vernachlässigt haben, ist die Ausdehnung der Radaufhängung.

5.2 Linearer Zusammenhang der Nutation und Rotation

In Abschnitt 4.3 hat sich gezeigt, dass der Quotient $\frac{\omega_{Nut}}{\omega_{Kreis}} = 0.153$ konstant ist. Da dieser Wert nicht von der Kreisfrequenz abhängt, folgern wir, dass er von der einzigen anderen involvierten Größe, dem Trägheitsmoment, abhängt. Das Trägheitsmoment von ω_{Kreis} ist offensichtlich $I_{Horizontal}$ und die Nutation lässt als einer überlagerte Schwingung um den Fixierpunkt betrachten. Dafür wird dann das Trägheitsmoment des Kreisels um die vertikale Achse benötigt. Die Werte für diese Trägheitsmomente wurden bereits in Abschnitt 4.1 berechnet. Es folgt:

$$\frac{\omega_{Nut}}{\omega_{Kreis}} = 0.153 = 0.201k = k\frac{I_{Horizontal}}{I_{Vertikal}} \tag{4}$$

mit der Proportionalitätskonstante k=0.76, deren Ursprung wird jetzt nicht weiter untersuchen. Weiterhin stellte sich die Messung der Nutationsperiode als schwierig heraus, weil die Nutation entweder zu schnell war oder zu schnell zum Erliegen kam. Deswegen enthält nur unsere dritte Messreihe für die Nutation verwertbare Ergebnisse, die wahrscheinlich mit hohem systematischen Fehler belegt sind.

Literatur

[1] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Springer Spektrum 2015

[2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013

[3] http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637 (Für Bilder)
Abrufdatum: 10.12.15