

Versuch 6
Kapillarität und Viskosität

Praktikanten: Jonas Isensee, Lennart Jahn
E-Mail: jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de
l.jahn@stud.uni-goettingen.de
Betreuer: Herbert Grönemeyer
Datum: 19.05.2016

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Mohrsche Waage	3
2.2	Kapillarität	3
2.3	Hagen-Poiseuille Gesetz	4
3	Durchführung	5
3.1	Kapillarität	5
3.2	Viskosität	6
4	Auswertung	7
4.1	Oberflächenspannung	7
4.2	Viskosität	9
4.2.1	Volumenstrom verschiedener Kapillaren	9
4.2.2	Volumenstrom in Abhängigkeit von der Zeit	9
5	Diskussion	10
5.1	Oberflächenspannung	10
5.2	Viskosität	11
	Literatur	11

1 Einleitung

Kapillarität ist ein entscheidendes physikalisches Phänomen, welches zum Beispiel den Transport von Wasser in Pflanzen ermöglicht. Allgemein ist Kapillarität das besondere Verhalten von Stoffen an ihren Grenzflächen, die sich durch spezifische Oberflächenspannungen ergeben. Viskosität ist die innere Reibung von Flüssigkeiten und Gasen. Sie ist entscheidend, wenn man zum Beispiel die Menge eines Stoffes betrachtet, die pro Zeiteinheit durch ein Rohr fließen kann.

2 Theorie

2.1 Mohrsche Waage

Die Mohrsche Waage ist ein einfaches Experiment, mit dem man die Dichte von Flüssigkeiten bestimmen kann. Der Aufbau ähnelt dem einer Balkenwaage. An einem horizontalen Balken, der an einem Punkt in der Mitte gelagert ist, hängt an einer Seite ein Tauchgewicht mit bekanntem Volumen. Dieses wird durch ein Gegengewicht auf der anderen Seite in Waage gehalten. Taucht man es anschließend wie in Abb. 1(a) in die zu untersuchende Flüssigkeit ein, verringert sich nach dem Archimedischen Prinzip die Gewichtskraft entsprechend dem Dichteunterschied. Mithilfe von kleinen Gewichten bekannter Masse kann man den Balken wieder in Waage bringen (vgl. Abb.1(a)). Das von ihnen erzeugte Drehmoment Θ , lässt einen dann auf die Dichte der Flüssigkeit ρ_{FL} mit folgender selbst hergeleiteter Formel schließen:

$$\Theta = rF = rg\rho_{FL}V_{TG} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{FL} = \frac{\Theta}{rgV_{TG}} \quad (1)$$

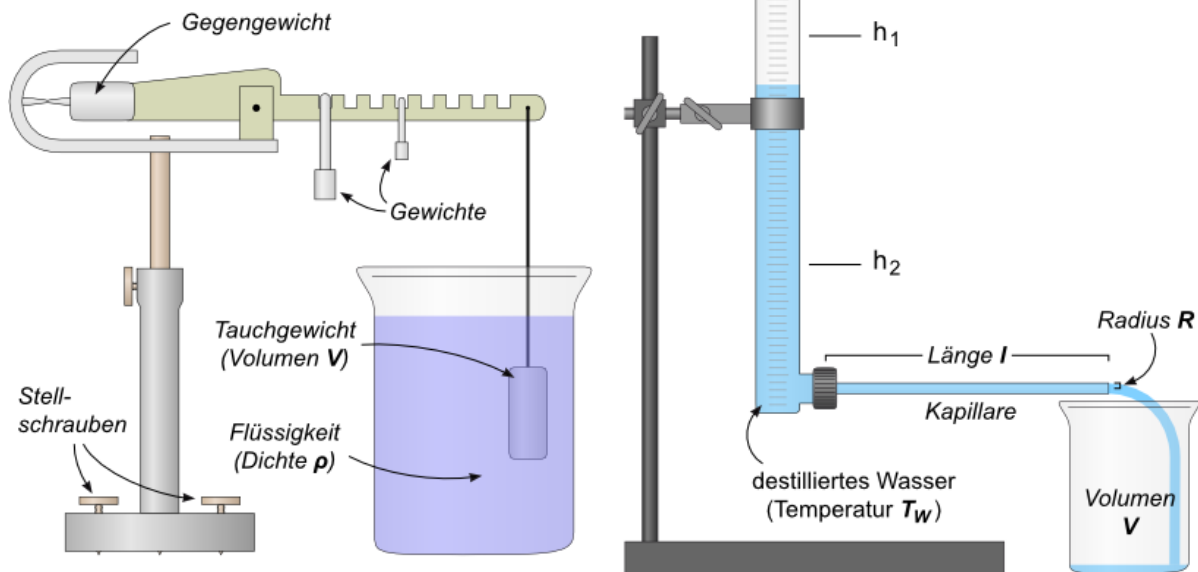
2.2 Kapillarität

Flüssigkeiten besitzen eine Oberflächenspannung. Zusätzlich besitzen alle Stoffe i an ihren Grenzflächen mit anderen Stoffen j sogenannte Grenzflächenspannungen σ_{ij} . Diese ist negativ, wenn der Stoff j die Randmoleküle von i stärker anzieht als i selbst. Im Fall von zwei Flüssigkeiten käme es dann zu einer Vermischung. Grenzt eine Flüssigkeitsoberfläche an die Wand des Behälters, so wirken drei Grenzflächenkräfte wie in Abb.2. Dabei gilt das Verhältnis:

$$\sigma_{23} - \sigma_{13} = -\sigma_{12}\cos\theta$$

solange $\sigma_{23} - \sigma_{13}$ nicht größer ist als σ_{12} . Die Flüssigkeit wird also in der Kapillare hochgezogen, bis ein Kräftegleichgewicht wieder hergestellt ist. Die angehobene Flüssigkeitssäule hat die Gewichtskraft $F_G = \pi r^2 h \rho_{FL} g$ und entlang der Randlinie wirkt die Kraft $F_K = 2\pi r \sigma_{12} \cos\theta$. Daraus ergibt sich dann die Formel (Quelle: [1] S.201):

$$h = \frac{2\sigma_{12}\cos\theta}{r\rho_{FL}g} \quad (2)$$



(a) Schema einer Mohrschen Waage mit einem Tauchgewicht, das über einen dünnen Faden an einem Balken befestigt ist. Quelle: [3]

(b) Schema des Ausflussversuchs: Das Wasser fließt aus einem hohen mit Skala versehenen Gefäß durch eine Kapillare. Quelle: [3]

Abbildung 1

2.3 Hagen-Poiseuille Gesetz

Das Hagen-Poiseuille Gesetz ist auch bekannt unter dem Namen, ohmsches Gesetz für laminare Strömung. Es beschreibt, wie schnell eine Flüssigkeit bei äußerem Druck durch einen dünnen Hohlzylinder fließen kann. Das gilt allerdings nur für laminare Strömung. Mit laminarer Strömung bezeichnet man eine Strömung, die frei von jeglichen Turbulenzen ist. Ob diese vorhanden ist, hängt von der Flussgeschwindigkeit und den Reibungsverlusten ab. Ist das der Fall, dann bewegen sich dünne Schichten der Flüssigkeit mit einer spezifischen inneren Reibung, der Viskosität, übereinander hinweg. Dort wo die Flüssigkeit den Rand berührt, haftet sie und bewegt sich nicht. Für ein rotations-symmetrisches Rohr, bedeutet das, dass die dünnen Schichten konzentrische Hohlzylinder sind und die Flüssigkeit zur Mitte hin immer schneller wird. Die Druckkraft ergibt sich aus dem Druckunterschied zwischen Ein- und Ausgang der Kapillare und der Querschnittsfläche. Integriert man den Geschwindigkeitsgradienten, der sich aus den vorherigen Überlegungen ergibt über die Querschnittsfläche, so bekommt man eine Formel für den Volumenstrom J_V in Abhängigkeit von dem Radius R und der Länge l der Kapillare, sowie dem Druckunterschied Δp und der Viskosität η der Flüssigkeit (Quelle: [1] S.125):

$$J_V = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p \quad (3)$$

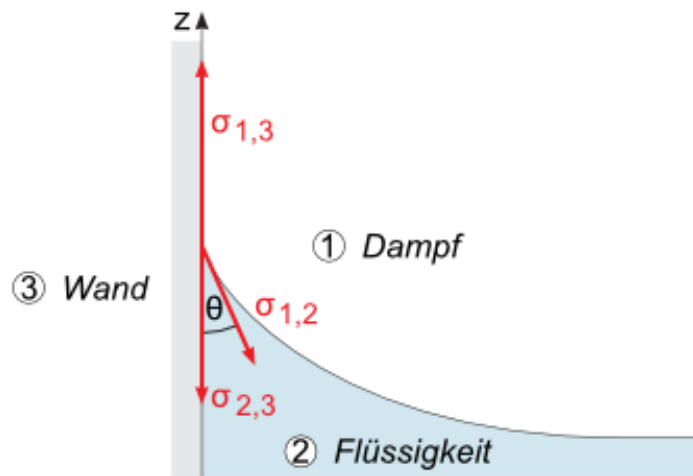


Abbildung 2: Das Verhältnis der Oberflächenspannungen σ_{23} , σ_{13} und σ_{12} bestimmt den Winkel θ . Quelle: [3]

3 Durchführung

3.1 Kapillarität

- **Kapillaren reinigen:** Für die folgenden Experimente ist es wichtig, dass die Kapillaren so sauber sind wie möglich. Daher reinigt man sie vor Beginn und anschließend bei jedem Flüssigkeitswechsel. Zum Reinigen wäscht man die Kapillaren zuerst mit einem Reinigungsmittel um Rückstände zu entfernen. Danach spült man sie noch mit destilliertem Wasser und trocknet sie zum Schluss mit einer Wasserstrahlpumpe, die einen Unterdruck erzeugt, welcher so genutzt wird, dass Tropfen aus der Kapillare heraus gesogen werden.
- **Kapillaren vermessen:** Zunächst vermisst man die Durchmesser der einzelnen Kapillaren mit einem Messmikroskop. Dazu legt man die jeweilige Kapillare auf die vorgesehene Halterung wie in Abb.3. Schaut man durch das Mikroskop, sieht man die Öffnung der Kapillare und ein Fadenkreuz, das in das Objektiv eingebaut ist. Dann stellt man das Fadenkreuz mithilfe der Stellschraube nacheinander auf die beiden inneren Ränder der breitesten Stelle der Kapillare und liest dann die Verschiebung an der Skala ab. Dabei ist zu beachten, dass man bei jeder Messung nur in eine Richtung dreht, um einen Messfehler durch potentiellen toten Gang zu verhindern.
- **Höhenunterschiede:** Nun misst man die Höhenunterschiede, die zwischen der Oberfläche der Flüssigkeit in der Kapillare und außerhalb entstehen. Dieses Experiment führt man mit destilliertem Wasser, Methanol und Ethylenglykol durch. Dafür füllt man ein Becherglas mit dieser Flüssigkeit und tauchen dann eine Kapil-

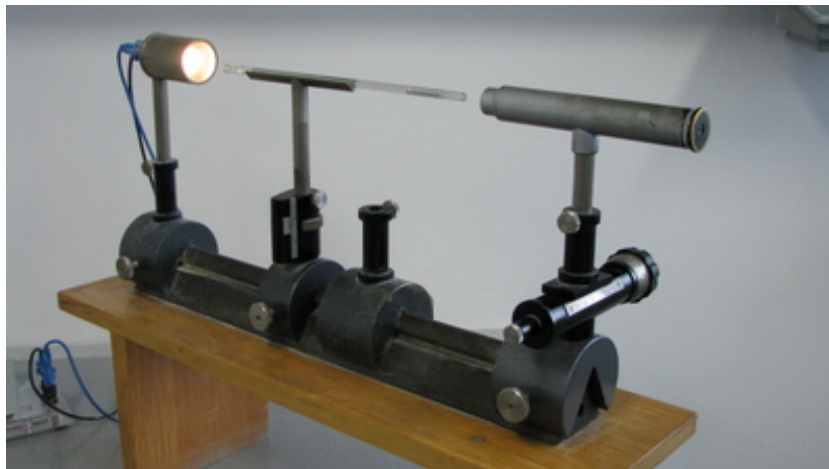


Abbildung 3: Foto des Messmikroskops. Kapillarenhalterung, Lampe und Mikroskop sind auf einer Schiene angebracht. Das Mikroskop ist auf einer Schiene mit Skala gelagert. Quelle: [3]

lure hinein, wie es im Hintergrund von Abb. 4 zu erahnen ist. Dabei ist zu beachten, dass man die Kapillare zuerst tief eintaucht und dann wieder herauszieht, um Messfehler durch Verunreinigungen zu vermeiden. Auf den Kapillaren sind kleine Skalen angebracht, also fixiert man sie mithilfe der Halterung so, dass der unterste Skalenteil genau auf der Höhe der äußeren Oberfläche ist. Anschließend liest man die Höhe im Inneren der Kapillare an der Skala ab. Da dieses Experiment etwas fehleranfällig ist, sollte man es für alle drei Kapillaren bei den drei Flüssigkeiten jeweils drei mal durchführen.

- **Dichte bestimmen:** Weiterhin ist es wichtig, die Dichte der Flüssigkeiten zu kennen. Dafür benutzen wir die Mohrsche Waage, wie in 2.1 beschrieben. Zu beachten ist dabei, dass die Waage vor dem Eintauchen in die Flüssigkeit mithilfe des Gegengewichts gut ausbalanciert ist. Für folgende Messungen muss das Tauchgewicht vorher wieder abgetrocknet werden. Außerdem ist das Volumen des Tauchgewichts nicht gegeben. Dieses bestimmen wir bei der ersten Messung, da die Dichte $\rho_W = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ von destilliertem Wasser als bekannt angenommen wird.

3.2 Viskosität

Das zweite Experiment beschäftigt sich mit der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser. Der Aufbau ist schematisch in Abb. 1(b) dargestellt. Zunächst spannen wir eine Kapillare in den unteren Ausfluss des Glasbehälters. Anschließend halten wir die Öffnung der Kapillare mit einem Finger zu und füllen den Glasbehälter bis zur 50 cm Markierung. Dann messen wir mit einer Stoppuhr die Zeit, bis so viel Wasser durch die Kapillare ausgeflossen ist, dass der Wasserstand auf 45 cm abgefallen ist. Dieses

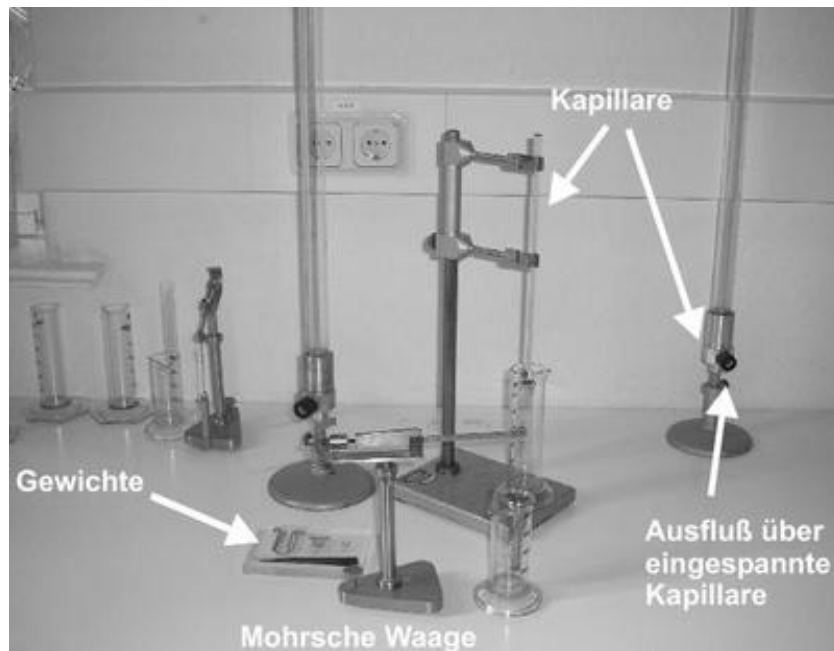


Abbildung 4: Aufbau des Experiments Quelle: [3]

Experiment wiederholen wir drei mal für jede Kapillare. Um Wasser zu sparen, ist es ratsam, das Wasser aus dem Auffangbehälter wieder oben einzufüllen. Außerdem muss man nicht erst das gesamte Wasser ablaufen lassen, um die Kapillare zu wechseln. Stattdessen genügt es, das Rohr oben zuzuhalten, während jemand anderes die Kapillare wechselt.

Zum Schluss bestimmen wir noch die Ausflussgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Zeit. Das machen wir allerdings aus Gründen der Durchführbarkeit ausschließlich für die Dünnsen der drei Kapillaren. Ist sie eingebaut, erhöhen wir den Wasserstand erneut auf 50 cm. Dann lassen wir das Wasser durch die Kapillare auslaufen und notieren in regelmäßigen Abständen, zum Beispiel alle 2 cm - 5 cm, sowohl Wasserstand, als auch vergangene Zeit.

4 Auswertung

4.1 Oberflächenspannung

Für die Berechnung der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten müssen zunächst einige anderen Werte berechnet werden.

Mittelwerte aus den drei Messungen der Radien r_i der Kapillaren sind in Tabelle 1 dargestellt. Weiterhin ist der statistische Fehler des Mittelwertes angegeben.

Die Dichten ρ der Flüssigkeiten, die mit der Mohr'schen Waage bestimmt wurden, sind

Kapillare	Radius/mm	Fehler/mm
Rot	0,82	$\pm 0,02$
Grün	1,76	$\pm 0,03$
Blau	1,22	$\pm 0,04$

Tabelle 1: Radien der Kapillaren.

in Tabelle 2 zusammengefasst. Zur Berechnung wurde die Dichte von destilliertem Wasser auf $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ gesetzt und die anderen Dichten relativ dazu bestimmt. Die Fehler ergeben sich aus einer Abschätzung der Messgenauigkeit der Mohr'schen Waage auf 2 g cm Drehmomentfehler beim Behängen des Armes mit Gewichten.

Flüssigkeit	Dichte/ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	Fehler/ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
destill. Wasser	1	± 0
Methanol	0,92	$\pm 0,04$
Ethylenglykol	1,08	$\pm 0,04$

Tabelle 2: Dichten der Flüssigkeiten.

Mittels dieser Größen lässt sich die Oberflächenspannung σ_{12} aus Gl.2 umgestellt nach σ_{12} und unter der Annahme, dass θ klein ist ($\cos \theta \approx 1$), berechnen. Die Mittelwerte der Oberflächenspannung für die einzelnen Flüssigkeiten sind in Tabelle 3 zu finden. Der Fehler des Mittelwertes wurde durch den größten Fehler der Einzelwerte abgeschätzt (Die Fehler waren alle ungefähr gleich). Die Fehler der Einzelwerte ergeben sich durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.

$$\sigma_{\sigma_{12}} = \sqrt{\sigma_h^2 \frac{r^2 \rho^2 g^2}{4} + \sigma_r^2 \frac{h^2 \rho^2 g^2}{4} + \sigma_\rho^2 \frac{h^2 r^2 g^2}{4}} \quad (4)$$

Flüssigkeit	Oberflächenspannung/ $\frac{\text{mN}}{\text{m}}$	Fehler/ $\frac{\text{mN}}{\text{m}}$
destill. Wasser	63	± 4
Methanol	32	± 3
Ethylenglykol	51	± 4

Tabelle 3: Oberflächenspannungen der Flüssigkeiten.

4.2 Viskosität

Die Viskosität η von Wasser wird auf zwei Arten bestimmt.

4.2.1 Volumenstrom verschiedener Kapillaren

Aus den Durchflusszeiten für (22 ± 2) ml Wasser (Volumen zwischen Strichmarke 45 und 50) durch die verschiedenen Kapillaren wird die Viskosität nach Formel 3 berechnet. Dazu wird noch der Wasserdruck in den Kapillaren benötigt. Mittels der Formel $h\rho g = p$ (kommt aus der Kraft pro Fläche, es kürzt sich viel), mit der mittleren Wasserhöhe $h = 47.5$ cm, wird dieser berechnet. Der Volumenstrom J_V wurde durch den mittleren Volumenstrom $\frac{V}{t}$ genähert. Die berechneten Werte für die Viskosität von Wasser sind in Tabelle 4 zu finden. Die Fehler

$$\sigma_\eta = \sqrt{\sigma_r^2 \frac{\pi 4r^3 p^2}{8J_V l} + \sigma_p^2 \frac{\pi r^4}{8J_V l} + \sigma_{J_V}^2 \frac{\pi r^4 p^2}{8J_V^2 l} + \sigma_l^2 \frac{\pi r^4 p^2}{8J_V l^2}} \quad (5)$$

wurden mit Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Kapillare	Viskosität/mPa s	Fehler/mPa s
Rot	0,7	$\pm 0,2$
Grün	1,3	$\pm 0,1$
Blau	1,1	$\pm 0,1$
Mittelwert	1	$\pm 0,1$

Tabelle 4: Viskosität von Wasser.

4.2.2 Volumenstrom in Abhängigkeit von der Zeit

In Abbildung 5 ist der Logarithmus der Höhe im Glaszylinder über der Zeit aufgetragen. An die Messpunkte wurde mit gnuplot eine Ausgleichsgerade $y = mx + b$, nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, gefittet. Die Parameter sind:
 $m = (-0,00137 \pm 0.00002)$, $b = (-0,72 \pm 0.02)$.

Die Viskosität des destillierten Wassers lässt sich auch mithilfe der Geradensteigung der halblogarithmischen Abbildung bestimmen. Dafür lösen wir Gl.3 nach der Viskosität η auf und verwenden:

$$\Delta p = \frac{\pi R^2 h \rho g}{\pi r^2} = \frac{R^2 h \rho g}{r^2} \quad J_V = \pi R^2 (-\dot{h}).$$

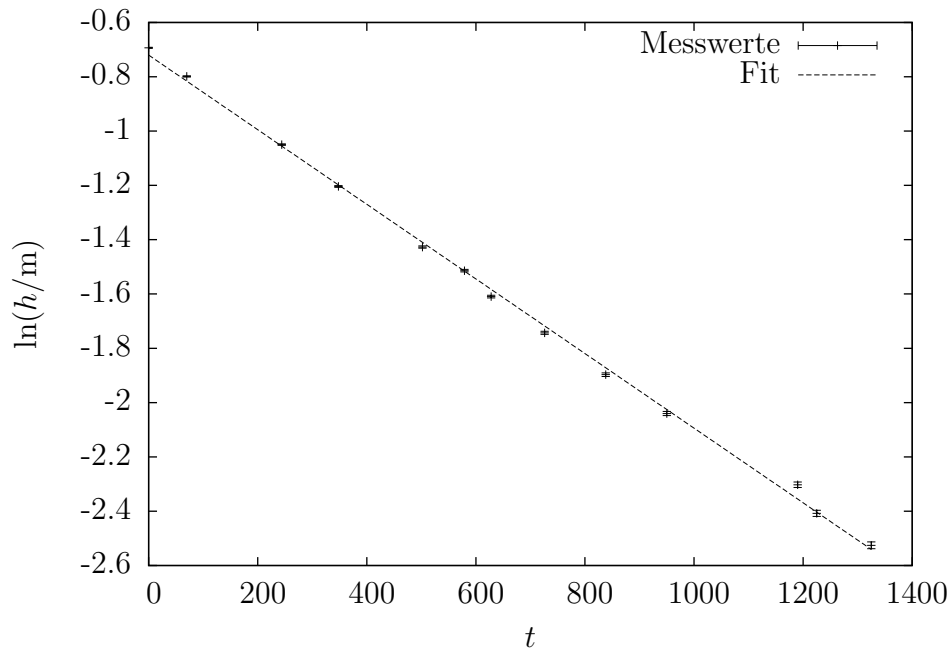


Abbildung 5: Graph des Ausflusses durch die Kapillare (halblogarithmisch).

Außerdem gilt für die Geradensteigung $m = \frac{d}{dt}(\log(h(t))) = \frac{\dot{h}}{h}$. Daher ist die Viskosität des Wassers:

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8L} \Delta p \frac{1}{J_V} = -\frac{r^2 \rho g h}{8L} \frac{1}{\dot{h}} = -\frac{r^2 \rho g}{8L} \frac{1}{m}.$$

Für die rote Kapillare ergibt sich damit aus unseren Werten eine Viskosität von $(0,65 \pm 0,1)$ mPa.s. Der Fehler dieses Wertes berechnet sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung durch die Formel:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\sigma_r^2 \left(\frac{r \rho g}{4Lm}\right)^2 + \sigma_L^2 \left(\frac{r^2 \rho g}{8L^2 m}\right)^2 + \sigma_m^2 \left(\frac{r^2 \rho g}{8Lm^2}\right)^2}.$$

5 Diskussion

5.1 Oberflächenspannung

Der Wert der Oberflächenspannung von Wasser, den wir aus unseren Messungen erhalten haben, ist etwas kleiner als der Literaturwert ($72.75 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$ bei 20°C , [4]) liegt aber noch im $3\text{-}\sigma$ Bereich. Das könnte jedoch der Tatsache geschuldet sein, dass wir den Cosinus der Oberflächenspannungsformel vernachlässigt haben. Unser Ergebnis für Ethylenglykol hat nur eine geringe Abweichung Literaturwert([4]) und liegt im Fehlerintervall. Für Methanol haben wir leider einen zu großen Wert bestimmt. Der Literaturwert $22 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$

([4]) liegt nicht einmal mehr im $3\text{-}\sigma$ Bereich. Grund hierfür müssen, im Folgenden beschriebene, systematische Fehler sein.

Generelle Quellen für systematischen Fehler sind die Verwendung derselben Kapillaren für unterschiedliche Flüssigkeiten. Da die Kapillaren nie vollständig gereinigt werden können herrscht, durch Vermischung mit Rückständen, in der Kapillare eine andere Stoffzusammensetzung als im Becherglas, die sich wegen der räumlichen Enge auch nur schlecht ausgleicht. Die Steighöhe verändert sich dadurch natürlich beachtlich. Außerdem hat die Temperatur ebenfalls starken Einfluss auf die Ergebnisse und im Praktikumsraum waren laut Thermometer fast 25°C .

5.2 Viskosität

Die gemessene Viskosität des Wassers mit der roten Kapillare ist bei beiden Versuchen in sich stimmig, jedoch kleiner als der Literaturwert (1 mPa s bei 20°C , [4]). Dieser liegt aber im $3\text{-}\sigma$ Bereich. Schuld daran ist vermutlich die Messung des Radius der Kapillare, da dieser mit R^4 in die Werte eingeht. Darauf deutet ebenfalls hin, dass auch bei der zweiten Methode (Geradensteigung) ein vergleichbares Ergebnis herauskommt. Der Wert für die grüne Kapillare liegt, wahrscheinlich aus ähnlichen Gründen, zu hoch. Das Ergebnis für die blaue Kapillare entspricht sehr genau dem erwarteten Wert, dieser liegt im $1\text{-}\sigma$ Bereich. Der Mittelwert entspricht sogar genau dem Literaturwert, bei akzeptabel großem Fehlerbereich.

Literatur

- [1] D. Meschede, *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Springer Spektrum 2015
- [2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 1*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013
- [3] <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3548> (abgerufen 20.05.2016)
- [4] https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/ (abgerufen 25.05.2016)