

**Versuch 17**

**Fresnelsche Formeln und  
Polarisation**

---

Praktikant: Lennart Jahn  
Mitpraktikant: Jonas Isensee  
E-Mail: l.jahn@stud.uni-goettingen.de  
jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de  
Betreuer: Morgan Freeman  
Datum: 12.1.2017

Zensur:

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Brechungsindex . . . . .	3
2.2	Polarisation . . . . .	3
2.3	Fresnelsche Formeln . . . . .	4
2.4	Brewster-Winkel . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Aufbau . . . . .	6
3.2	Messungen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Reflektionskoeffizient . . . . .	8
4.2	Drehung der Schwingungsebene . . . . .	9
4.3	Brechungsindex . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
5.1	Aufbau . . . . .	12
5.2	Reflektionskoeffizient . . . . .	12
5.3	Drehwinkel der Schwingungsebene . . . . .	12
5.4	Brechungsindex . . . . .	13
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

---

# 1 Einleitung

Polarisation ist ein wenig bekanntes Phänomen, das in der Wissenschaft jedoch große Anwendung findet. So können zum Beispiel innere Spannungen in Materialien über Polarisationsmessungen bestimmt werden. Auch im Alltag ist auf Polarisation nicht mehr zu verzichten, sie ist Grundlage des 3D-Kino und der reflektionsfilternden Sonnenbrille. In diesem Versuch soll die Reflektion von linear polarisiertem Licht an einem Prisma untersucht werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Brechungsindex

Licht breitet sich in unterschiedlichen Materialien mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $c_{\text{Mat}}$  aus. Der Brechungsindex eines Materials wird als  $n = \frac{c}{c_{\text{Mat}}}$  definiert. Geht ein Lichtstrahl aus einem Medium mit Brechungsindex  $n_e$  unter dem Winkel  $\theta_e$  in ein neues Medium mit Brechungsindex  $n_t$  über, so gilt für den Austrittswinkel  $\theta_t$  das Snelliussche Brechungsgesetz ([ZIN] S. 33):

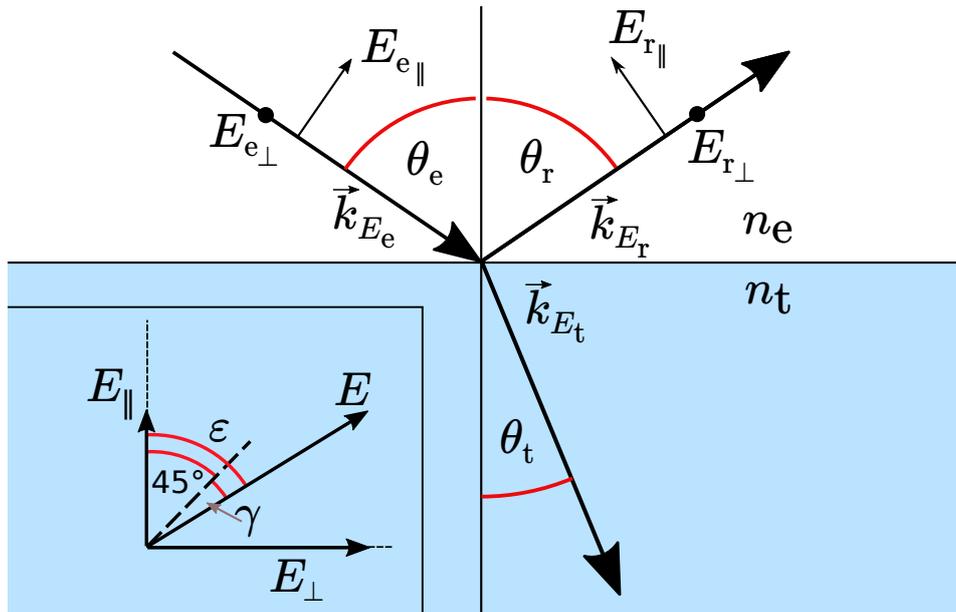
$$n_e \sin(\theta_e) = n_t \sin(\theta_t). \quad (1)$$

### 2.2 Polarisation

Licht ist eine Transversalwelle. Der Feldstärkevektor des  $E$ - und  $B$ -Feldes oszilliert senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ . Bei der Polarisation wird nur der  $\vec{E}$  Vektor betrachtet, da  $\vec{B}$  durch  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  bereits bestimmt ist. Man nennt Licht linear polarisiert, wenn der  $\vec{E}$ -Vektor in einer Ebene schwingt. Zeichnet man nun eine Bezugsebene aus, kann man einen Drehwinkel  $\varepsilon$  zwischen diesen Ebenen definieren. Mittels der Zerlegung von  $\vec{E}$  in einen Parallelteil  $E_{\parallel}$  und einen Orthogonalteil  $E_{\perp}$  zur Bezugsebene, kann man den Winkel  $\varepsilon$  einfach geometrisch berechnen. In Abb. 1 ist dazu unten links eine kleine Visualisierung der Situation eingefügt. Es gilt:

$$\tan(\varepsilon) = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}. \quad (2)$$

Die lineare Polarisation ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit. Licht kann auch elliptisch polarisiert sein, dabei dreht sich der  $\vec{E}$ -Vektor entlang einer Ellipse um  $\vec{k}$ . Diese Zustände lassen sich als Überlagerung von zwei orthogonalen linear polarisierten Lichtstrahlen mit Phasenversatz darstellen. Im Spezialfall der zirkulären Polarisierung dreht sich der  $\vec{E}$ -Vektor mit konstantem Betrag (im Kreis) um  $\vec{k}$ .



**Abbildung 1:** Schematische Zeichnung der Reflexion einer linear polarisiert einfallenden Lichtwelle an einem Übergang in ein optisch dichteres Medium. Unten links eingefügt: Visualisierung des Drehwinkels  $\varepsilon$  aus Abschnitt 2.2. (Der zusätzlich eingezeichnete Winkel  $\gamma$  ist erst in der Auswertung wichtig.) [Eigenes Werk des Autors.]

## 2.3 Fresnelsche Formeln

Beim Übergang von linear polarisiertem Licht in ein optisch dichteres Medium wird nicht das gesamte Licht in das neue Medium hinein gebrochen, es wird auch ein Anteil reflektiert. Die Intensität dieses reflektierten Lichtes hängt vom Polarisationswinkel  $\varepsilon$  bezüglich der Einfallsebene (siehe Abschnitt 2.2) und vom Einfallswinkel  $\theta_e$  ab. In Abbildung 1 ist die Situation an der Grenzfläche dargestellt. Der einfallende Lichtstrahl  $E_e$  wird zerlegt in seine Komponenten  $E_{e\parallel}$  und  $E_{e\perp}$  bezüglich der Einfallsebene. Diese Komponenten nennt man p- (parallel) und s- (senkrecht) polarisiertes Licht. Für diese Komponenten können jetzt Reflektionskoeffizienten  $r_{\parallel}$  und  $r_{\perp}$  definiert werden, die den Anteil der reflektierten Feldstärke  $E_r$  an der eingefallenen Feldstärke beschreiben:

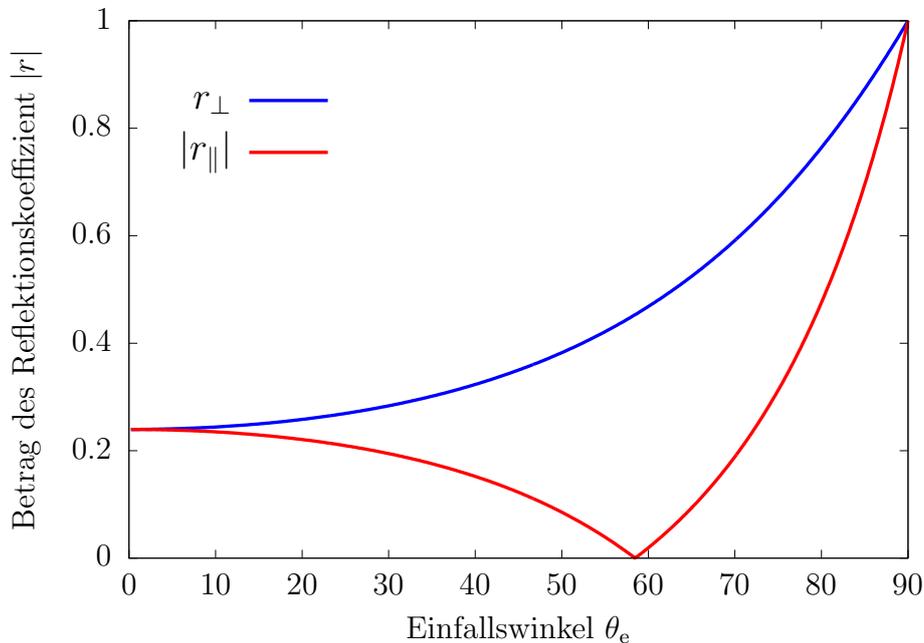
$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{n_e \cos(\theta_e) - n_t \cos(\theta_t)}{n_e \cos(\theta_e) + n_t \cos(\theta_t)} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (3)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{n_t \cos(\theta_e) - n_e \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_e) + n_e \cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)}. \quad (4)$$

Eine Herleitung dieser Koeffizienten ist in [ZIN] S. 35-38 zu finden. Diese Gleichungen werden die Fresnelschen Formeln genannt.  $n_e$  und  $n_t$  sind dabei die Brechungsindizes der Materialien,  $\theta_e$  und  $\theta_t$  die Winkel des einfallenden und transmittierten Strahls gegen das Lot. Diese sind auch alle in Abb. 1 eingezeichnet.

---

## 2.4 Brewster-Winkel



**Abbildung 2:** Betrag des Reflektionskoeffizienten  $r$  über dem Einfallswinkel  $\theta_e$  für p- und s-polarisiertes Licht und die Brechungsindizes  $n_e = 1$  und  $n_t = 1,63$ .  
[Eigenes Werk des Autors.]

In Abb. 2 ist der Verlauf des Betrages der Reflektionskoeffizienten für die Brechungsindizes  $n_e = 1$  und  $n_t = 1,63$  über dem Einfallswinkel aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass  $r_{\parallel}$  unter einem gewissen Winkel null wird. Diesen Winkel nennt man Brewster-Winkel  $\theta_B$ . Auch aus Gleichung 4 ist die vollständige Auslöschung des p-polarisierten Lichts unter einem gewissen Winkel ersichtlich, da  $\tan(\theta_e + \theta_t)$  gegen  $\infty$  divergiert, wenn  $\theta_e + \theta_t = 90^\circ$ . Der gesamte Bruch geht dann gegen null. In [ZIN] auf Seite 40 findet sich eine genauere Begründung und die Formel:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_e}. \quad (5)$$

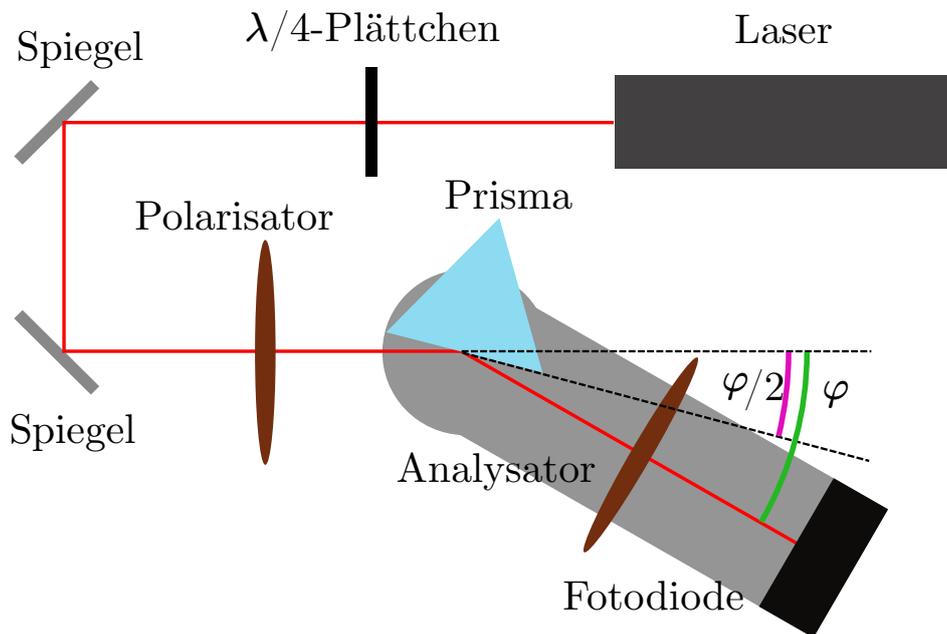
Für s-polarisiertes Licht existiert kein Winkel der Auslöschung.

---

## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

In Abb. 3 ist der Aufbau des Versuches schematisch aufgezeichnet. Der Laser oben links strahlt nahezu linear polarisiertes Licht ab. Da im Versuch verschiedene Polarisationsrichtungen benötigt werden und gleichmäßige Intensität erwünscht ist, wird der Laserstrahl als erstes durch ein  $\lambda/4$ -Plättchen geleitet, um zirkulär polarisiertes Licht zu erhalten. Dieses wird dann durch zwei Spiegel abgelenkt, um den Versuchsaufbau kompakter zu halten. Schließlich fällt es durch einen verstellbaren linearen Polarisator, mit dem nun die Polarisationsrichtung für die Messung eingestellt werden kann. So aufbereitet fällt das Licht nun auf ein Prisma, das auf einem Drehteller steht. Der Laserstrahl wird am Prisma reflektiert. Am Drehteller befindet sich ein Schwenkarm, auf dem ein weiterer linearer Polarisator, im Folgenden der Analysator genannt, und eine Fotodiode montiert sind. Der Schwenkarm kann mittels einer Winkelskala genau eingestellt werden, das Prisma kann dann so gedreht werden, dass der Lichtstrahl die Fotodiode trifft. Der Analysator ist abnehmbar, da er nicht in allen Versuchsteilen benötigt wird. Die Fotodiode ist an einen Messverstärker angeschlossen, an dem eine Spannung abgelesen werden kann, die proportional zur Intensität des einfallenden Lichtes ist.



**Abbildung 3:** Schematische Zeichnung des Versuchsaufbaus. [Eigenes Werk des Autors.]

---

## 3.2 Messungen

Zu Beginn des Versuches müssen Messverstärker und Laser aufwärmen, um systematische Fehler durch geräteinterne Veränderungen in der Aufwärmphase zu vermeiden. Währenddessen kann bereits der Strahlengang justiert werden. Drehteller und Spiegel werden dafür so verstellt, dass das Licht gerade und mittig auf das Prisma fällt, Polarisator und Analysator zentral durchquert und in der richtigen Höhe für die Fotodiode ankommt. Der Messverstärker wird so konfiguriert, dass die Ausgangsspannung immer in seinem Arbeitsbereich liegt. Ist die Aufwärmphase beendet, wird eine Referenzmessung durchgeführt. Dazu werden Prisma und Analysator entfernt und die Spannung  $U_0$  am Verstärker für die Polarisatoreinsellungen  $90^\circ$  und  $0^\circ$  gegen die Vertikale notiert (diese entsprechen später p- und s-polarisiertem Licht am Prisma). Danach wird das Prisma wieder in den Strahlengang eingebracht.

**Reflektionskoeffizient** Der Reflektionskoeffizient des Prismas für p- und s-polarisiertes Licht soll gemessen werden. Für die Messung bleibt der Analysator entfernt. Der in Abbildung 3 eingezeichnete Winkel  $\varphi$  wird dazu zwischen  $10^\circ$  und  $150^\circ$  in  $5^\circ$  Schritten erhöht. Das Prisma muss ebenfalls immer nachgedreht werden. Für jede Stellung des Schwenkarmes wird dann der Polarisator nacheinander auf  $90^\circ$  und  $0^\circ$  gegen die Vertikale eingestellt und die Spannung  $U$  am Verstärker notiert.

**Drehung der Schwingungsebene** Für die Messung der Drehung der Schwingungsebene des Lichts wird der Analysator wieder auf dem Schwenkarm montiert. Der Polarisator wird für die gesamte Messung auf einen Winkel von  $45^\circ$  eingestellt. Nun wird der Schwenkarm wieder in  $5^\circ$  Schritten zwischen  $10^\circ$  und  $150^\circ$  bewegt. Diesmal wird für jede Einstellung der Analysator gedreht, bis die Spannung am Verstärker minimal wird und der Winkel  $\delta$  des Analysators gegen die Vertikale notiert.

---

## 4 Auswertung

### 4.1 Reflektionskoeffizient

In der Messung wird der Winkel  $\varphi$  (siehe Abb. 3) eingestellt. Der Fehler wird auf  $2,5^\circ$ , einen halben Skalenteil, geschätzt.  $\varphi$  entspricht aber noch nicht dem Einfallswinkel  $\theta_e$ . In der Abbildung ist ebenfalls eingezeichnet, dass der Winkel gegen die Seite des Prismas genau  $\varphi/2$  beträgt. Da  $\theta_e$  gegen das Lot auf dieser Seite gemessen wird gilt:

$$\theta_e = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$$
$$\sigma_{\theta_e} = \frac{\sigma_\varphi}{2}.$$

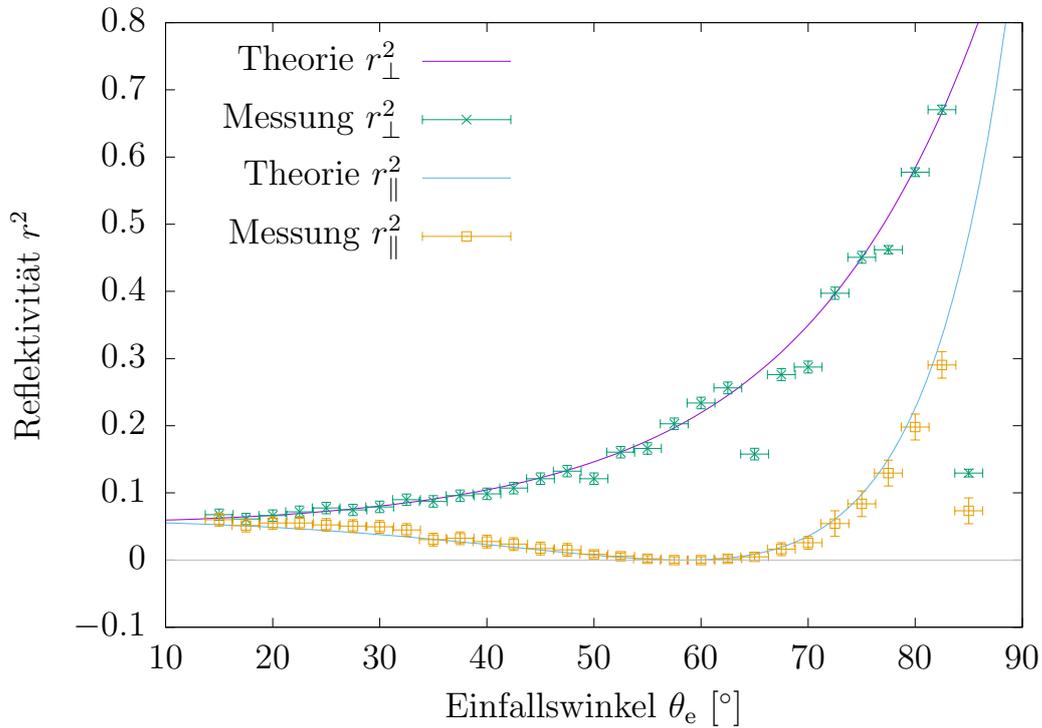
Über die absolute Intensität des Laserstrahls sind keine Aussagen möglich, da die Proportionalitätskonstante zur Spannung am Verstärker unbekannt ist. Da aber die Spannung ohne irgendeine Reflektion bekannt ist, kann man durch Normierung die relativen Intensitäten  $\hat{I}$  berechnen. Da die Referenzmessung fehlerbehaftet ist, muss auch für die Normierung eine Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden. Es gilt:

$$\hat{I} = \frac{U}{U_0}$$
$$\sigma_{\hat{I}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{U\sigma_{U_0}}{U_0^2}\right)^2}$$

Da  $I \propto E^2$  gilt  $\hat{I}_\perp^2 = r_\perp^2$  und  $\hat{I}_\parallel^2 = r_\parallel^2$ . Um zum Vergleich  $r_\perp^2$  und  $r_\parallel^2$  aus den Formeln 3 und 4 berechnen zu können, wird noch der Winkel  $\theta_t$  benötigt. Der Brechungsindex  $n_t$  des Prismas wird im Praktikumshandbuch ([DPP] S.51 17.6) mit  $n_t = 1,63$  angegeben, deshalb kann  $\theta_t$  mit dem Snellschen Brechungsgesetz (Gleichung 1) und  $n_e = n_{\text{Luft}} = 1$  als

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{\sin(\theta_e)}{n_t}\right)$$

berechnet werden. In Abb. 4 sind nun die theoretischen und die aus den Messungen errechneten Werte für  $r^2$  aufgetragen.



**Abbildung 4:** Reflektivitäten  $r^2$  für p- und s-polarisiertes Licht über dem Einfallswinkel  $\theta_e$ . Die vollständige Auslöschung des p-polarisierten Lichtes unter dem Brewster-Winkel ist sehr gut erkennbar.

Achtung: Zur besseren Sichtbarkeit ist in dieser Grafik nicht der gesamte Wertebereich von  $r^2$  dargestellt. Weiterhin ist die y-Achse angehoben und Winkel unter  $10^\circ$  sind nicht dargestellt.

## 4.2 Drehung der Schwingungsebene

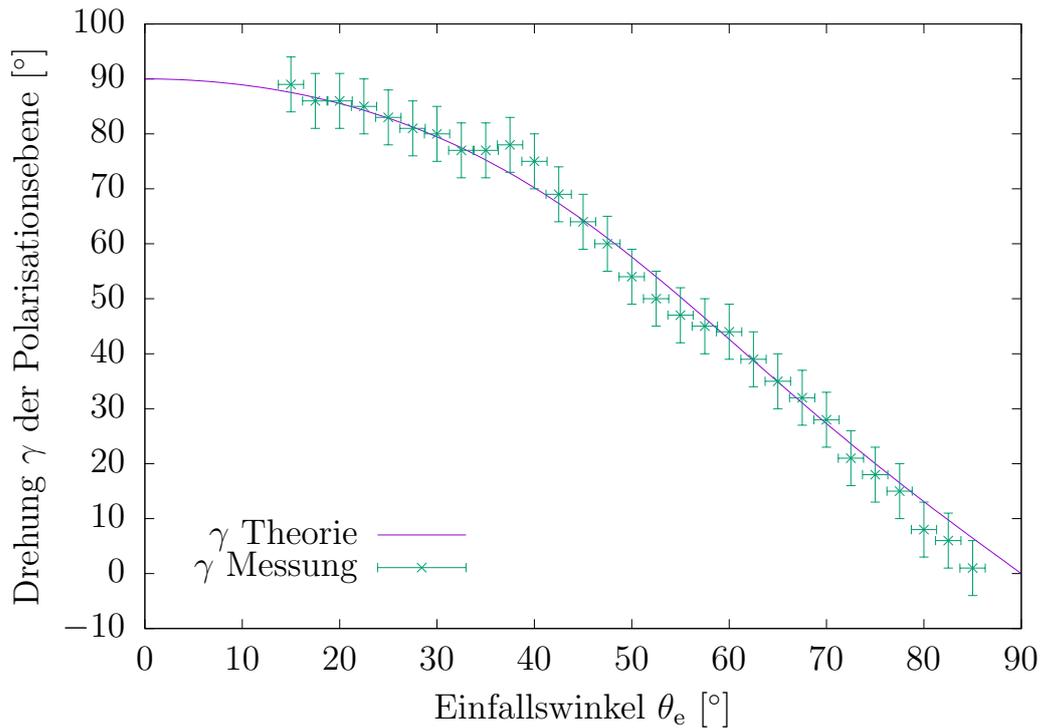
Wegen der unterschiedlichen Reflektion von p- und s-polarisiertem Licht dreht sich die Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes bei der Reflektion am Prisma. Für den Drehwinkel  $\varepsilon$  gilt nach Formel 2:

$$\tan(\varepsilon) = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} = -\frac{\cos(\theta_e - \theta_t)}{\cos(\theta_e + \theta_t)}.$$

Da das Licht schon unter  $45^\circ$  auf das Prisma einfällt, ist die linke Seite in unserem Fall  $\tan(\gamma + \pi/4)$  (siehe dazu nochmals Abb. 1).  $\gamma$  ist dann der Winkel, um den sich die Polarisationssebene rein durch die Reflektion dreht. Insgesamt ist also:

$$\gamma = \arctan\left(-\frac{\cos(\theta_e - \theta_t)}{\cos(\theta_e + \theta_t)}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

In der Messreihe wurde der Winkel der minimalen Intensität vermessen, der senkrecht auf der Polarisationssebene steht. Zusätzlich war die Polarisationssebene zu Beginn schon um  $45^\circ$  gedreht.  $\gamma$  errechnet sich also aus unseren gemessenen Winkeln  $\delta$  als  $\gamma = \delta - 45^\circ$ . Da das Minimum der Intensität sehr flach verläuft, wird der Winkelfehler in  $\gamma$  auf  $5^\circ$  geschätzt. Für den Einfallswinkel  $\theta_e$  gilt dieselbe Abschätzung wie oben. Die Ergebnisse für  $\gamma$  und die theoretische Kurve sind in Abb. 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Zu sehen ist die Drehung der Schwingungsebene des linear polarisierten Lichts in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\theta_e$ . Die eigentliche theoretische Kurve macht am Brewster-Winkel  $\theta_B$  einen Phasensprung von  $180^\circ$  abwärts. Eine Drehung der Polarisationssebene um  $180^\circ$  hat aber, wenn man Phasenverschiebung nicht beachtet, keine Auswirkung. Also wurde die Kurve in diesem Bereich der Übersicht halber um  $180^\circ$  angehoben.

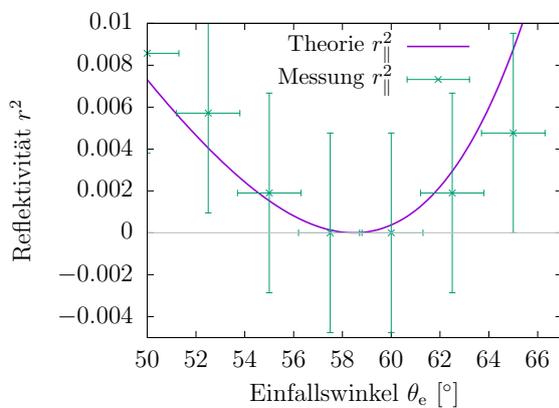
### 4.3 Brechungsindex

Der Brechungsindex  $n_t$  des Prismas kann aus dem Brewster-Winkel berechnet werden. Unter der Näherung  $n_{\text{Luft}} = 1$  gilt (nach Formel 5):

$$n_t = \tan(\theta_B) n_e = \tan(\theta_B)$$

$$\sigma_{n_t} = \sigma_{\theta_B} (\tan(\theta_B)^2 + 1).$$

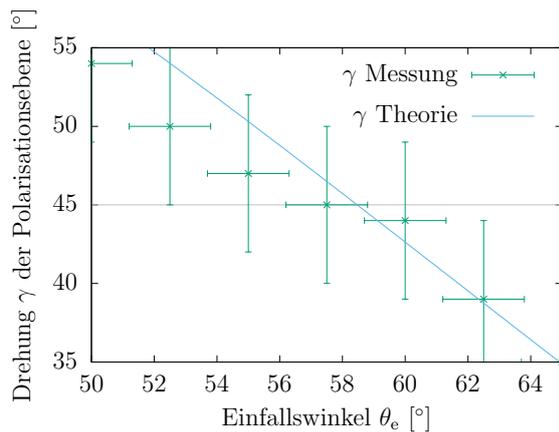
Hierbei ist wichtig, dass der Winkelfehler  $\sigma_{\theta_B}$  im Bogenmaß angegeben werden muss.



**Abbildung 6:** Vergrößerung von Abb. 4.

In Abb. 4 ist der Brewster-Winkel schlecht abzulesen. In Abb. 6 ist deswegen eine Vergrößerung auf den wichtigen Bereich zu sehen. Hier ist erkennbar, dass der Brewster-Winkel im Bereich von  $75,5^\circ - 60^\circ$  liegen muss. Unter Einbeziehung der umliegenden Messpunkte wird  $\theta_B = (59 \pm 5)^\circ$  abgeschätzt. Damit ergibt sich der Brechungsindex:

$$n_t = (1,7 \pm 0,4).$$



**Abbildung 7:** Vergrößerung von Abb. 5.

Man kann den Brewster-Winkel auch in Abb. 5 ablesen. Gerade wenn  $\gamma = 45^\circ$  ist nämlich die komplette p-polarisierte Komponente des Lichtes verschwunden. Es wurde erneut eine Vergrößerung des wichtigen Bereiches durchgeführt, sie ist in Abb. 7 zu sehen. Der Winkel von  $45^\circ$  liegt im Fehlerintervall der zentralen drei Messwerte. Der Messwert für  $\theta_e = 60^\circ$  liegt noch ein bisschen näher an  $45^\circ$  als der dritte. Also wird  $\theta_B = (58 \pm 5)^\circ$  abgeschätzt. Daraus folgt:

$$n_t = (1,6 \pm 0,4).$$

---

## 5 Diskussion

### 5.1 Aufbau

Das  $\lambda/4$ -Plättchen des Aufbaus war nicht richtig ausgerichtet. Es wandelt Licht nur korrekt von linear zu zirkulär polarisiertem Licht um, wenn seine optische Achse im  $45^\circ$  Winkel zur Polarisationsrichtung steht. Es gab jedoch keine Möglichkeit die Ausrichtung zu ändern. Die Intensität des p-polarisierten Lichts war deswegen um Faktor 3 schwächer. Das hat die Spannung am Verstärker stark verkleinert und das Verhältnis zwischen Signal und Rauschen verschlechtert. Außerdem wurde der Verstärker während der Referenzmessung auf die maximale Ausgangsspannung eingestellt. Während der Messung war die Spannung dann immer sehr klein, weil ein großer Teil des Lichtstrahls in das Prisma gebrochen wurde. Ohne die Verstärkung während der Versuchs zu ändern, was eine Quelle systematischer Fehler ist, ist dies jedoch nicht anders möglich.

### 5.2 Reflektionskoeffizient

Die theoretischen Kurven und die Messwerte liegen gut erkennbar übereinander. Meist befindet sich die Theoriekurve im  $1\sigma$ -Bereich der Messung. Besonders in der Messung für  $r_{\perp}^2$  liegen jedoch einzelne Werte deutlich zu tief. Wir vermuten, dass bei diesen Messungen der Laserstrahl nicht ganz genau auf die Fotodiode ausgerichtet war, und deshalb eine geringere Intensität gemessen wurde. Dafür spricht auch, dass bei den vier deutlichen Abweichungen im Bereich zwischen  $60^\circ$  und  $80^\circ$  auch jeweils der Wert für  $r_{\parallel}^2$  zu tief liegt. Das lässt sich aber nicht mit absoluter Sicherheit sagen, da dort tendenziell alle Werte zu niedrig sind. Der Wert für  $\theta_e = 85^\circ$  liegt in beiden Messungen viel zu niedrig. Das liegt daran, dass es unter diesem Winkel kaum noch möglich war, den Laserstrahl ordentlich am Prisma zu reflektieren und den Strahl danach auf die Fotodiode treffen zu lassen. Der Winkel in dem der Laserstrahl auf die Seite des Prismas traf, war zu steil.

### 5.3 Drehwinkel der Schwingungsebene

Auch beim Drehwinkel  $\gamma$  liegt die Theoriekurve fast überall im  $1\sigma$ -Bereich der Messwerte. Jedoch sind deutlich zwei Knicke in den Messwerten zu erkennen. Zumindest der Rechte ist auch erklärbar. Bei diesem Winkel mussten wir die Ableseseite am Analysator wechseln, seine Winkelskala geht nur halb herum. Wie der zweite Knick entstanden ist, wissen wir nicht.

---

## 5.4 Brechungsindex

Aus beiden Messreihen lässt sich der Brewster-Winkel gut ablesen. Es muss jedoch immer ein großer Fehler abgeschätzt werden, da das ausgemessene Minimum immer sehr flach verläuft. Die Ergebnisse für den Brechungsindex sind in Tabelle 1 nochmal zusammengefasst. Insgesamt liegt der wahre Brechungsindex immer im  $1\sigma$ -Intervall und sogar ungefähr in der Mitte der beiden berechneten Ergebnisse. Leider ist der relative Fehler sehr hoch, er liegt beide Male bei gut 20%. Das lässt sich jedoch aufgrund der Messmethode kaum vermeiden.

	Brechungsindex	Fehler
Reflektionskoeffizient	1,7	0,4
Drehwinkel	1,6	0,4
Angabe	1,63	

**Tabelle 1:** Zusammenfassung der Ergebnisse für den Brechungsindex

## Literatur

- [DPP] J. Große-Knetter, P. Schaaf, *Das Physikalische Praktikum Band II*, Universitätsverlag Göttingen 2016
- [ZIN] W. Zinth, U. Zinth *Optik Lichtstrahlen–Wellen–Photonen*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag München