

GRUNDPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 17
Fresnelsche Formeln

Praktikanten: Jonas Isensee
Lennart Jahn
E-Mail: jonas.isensee@stud.uni-goettingen.de
l.jahn@stud.uni-goettingen.de
Betreuer: Freddy MehrCurry
Datum: 15.12.2016

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Elektromagnetische Wellen	3
2.2	Polarisation	3
2.3	Fresnelsche Formeln	4
2.4	Brewster Winkel	5
2.5	Drehung der Schwingungsebene	5
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Fresnelsche Formeln	7
4.2	Brewster Winkel	7
4.3	Drehung der Schwingungsrichtung	9
5	Diskussion	10
5.1	Fresnelsche Formeln	10
5.2	Brechungsindizes	10
	Literatur	11

1 Einleitung

Die Fresnelschen Formeln beschreiben quantitativ die Reflektion und Transmission von elektromagnetischen Wellen an Grenzflächen. Sie lassen sich direkt aus den Maxwell'schen Gleichungen, sowie dem Snelliusschen Brechungsgesetz herleiten. Mit ihnen lassen sich Phänomene, wie den Brewster Winkel und totale interne Reflektion, vorhersagen. Dieser Versuch dient dem Vergleich der Fresnelschen Formeln mit tatsächlichen Messwerten.

2 Theorie

2.1 Elektromagnetische Wellen

Dies sind die Maxwell'schen Gleichungen des Elektromagnetismus in Abwesenheit von freien Ladungsträgern und Strömen: [NOLT, S. 259]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

\vec{E} ist das elektrische und \vec{B} das magnetische Feld. ε ist die Dielektrizitätskonstante und μ die magnetische Permittivität. Aus vergangenen Experimenten ist bereits bekannt, dass sich daraus Wellengleichungen herleiten lassen und sich Licht als elektromagnetische Welle auffassen lässt. Eine Besonderheit ist, dass Licht immer eine transversale Welle ist. Somit stehen \vec{E} - und \vec{B} -Feld immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Schreibt man eine EM-Welle in der komplexifizierten Form:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

so bilden \vec{E} und \vec{B} mit dem Wellenvektor \vec{k} ein Orthogonalsystem, da $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$.

2.2 Polarisation

Das eben beschriebene Orthogonalsystem hat noch einen Freiheitsgrad, da die Schwingungsebene des \vec{E} -Feldes frei wählbar ist. Das nennt man Polarisation. Licht, dem wir im Alltag begegnen ist im Allgemeinen unpolarisiert, also eine Überlagerung von vielen zufällig polarisierten Wellen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Polarisation bei Brechung und Spiegelung von Licht von Bedeutung ist. In diesem Fall teilt man das Licht in eine P- und S-Welle auf. Dabei stehen P und S für parallel und senkrecht zur Einfallsebene, wie in Abbildung 1 angedeutet ist.

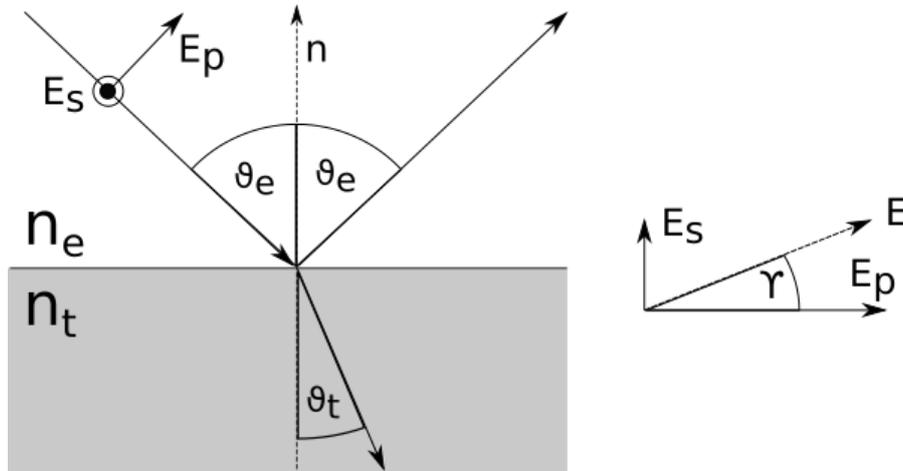


Abbildung 1: In diesen Skizzen sind die wichtigen Größen polarisierten Lichtes dargestellt. E_p liegt in der Ebene, die von einfallender Welle und Flächennormalvektor \vec{n} aufgespannt wird. E_s steht senkrecht darauf. Der Winkel γ bezeichnet die Drehung der Schwingungsebene. Quelle: [LP]

2.3 Fresnelsche Formeln

Eine qualitative Beschreibung von Brechung und Spiegelung von Licht an Grenzflächen, lässt sich mit dem Reflexionsgesetz ($\theta_{\text{Einfall}} = \theta_{\text{Ausfall}}$) und dem Snelliusschen Brechungsgesetz ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) erreichen. Um auch quantitativ zu beschreiben, welcher Anteil des Lichts reflektiert und welcher transmittiert wird, benötigt man die Fresnelschen Formeln. Sie lassen sich aus den Maxwell'schen Gleichungen herleiten, worauf hier allerdings verzichtet wird, und lauten: [ZIN, S. 38]

$$r_{\perp} = \frac{n_e \cos \theta_e - n_t \cos \theta_t}{n_e \cos \theta_e + n_t \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (1)$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_e - n_e \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_e + n_e \cos \theta_t} = \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)}. \quad (2)$$

Dabei entsprechen r_{\perp} und r_{\parallel} dem reflektierten Anteil der $E_{\perp} = E_s$, bzw. $E_{\parallel} = E_p$ Welle. n_e und n_t sind die Brechungsindizes des Einfalls- und des Transmissionsmediums. Einfallswinkel θ_e und Transmissionswinkel θ_t lassen sich nach dem Snelliusschen Gesetz bestimmen. Der transmittierte Anteil der Wellen lässt sich dann einfach durch $t_{p,s} = 1 - r_{p,s}$ bestimmen.

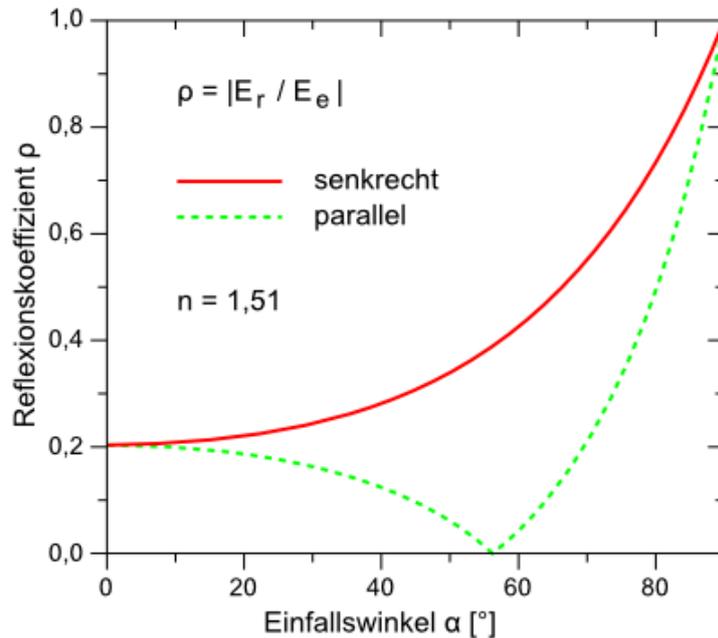


Abbildung 2: Hier sind die Gleichungen (1, rot) und (2, grün) graphisch aufgezeichnet. Quelle: [LP]

2.4 Brewster Winkel

Ein Blick auf Abb. 2 zeigt, dass die Reflektivität der parallel polarisierten Welle bei einem Winkel θ_{Brewster} kurz auf null zurück geht. Das passiert genau dann, wenn die reflektierte und die transmittierte Welle orthogonal aufeinander stehen. Auch in der Formel (2) wird das deutlich, da für $(\theta_e + \theta_t) \rightarrow \pi/2$ folgt, dass $\tan(\theta_e + \theta_t) \rightarrow \infty$, und somit $r_{\parallel} \rightarrow 0$.

2.5 Drehung der Schwingungsebene

Den Winkel γ zwischen \vec{E}_p und $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_p$ bezeichnet man als die Drehung der Schwingungsebene. Reflektiert man Licht an einer Grenzfläche, so ändert sich das Verhältnis von \vec{E}_p und \vec{E}_s in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_e . (vgl. Abb. 1) Das ist anschaulich klar, da sich bei einer Reflektion E_p zu E_s entsprechend der Fresnelschen Formeln abgeschwächt werden. Es gilt die Gleichung: [DEM2, S.238]

$$\tan(\gamma_r) = -\frac{\cos(\theta_e - \theta_t)}{\cos(\theta_e + \theta_t)} \tan(\gamma_e). \quad (3)$$

Der Transmissionswinkel θ_t berechnet sich aus θ_e und γ_e , γ_r sind Drehung der Schwingungsebene vor (e) und nach (r) der Reflektion.

3 Durchführung

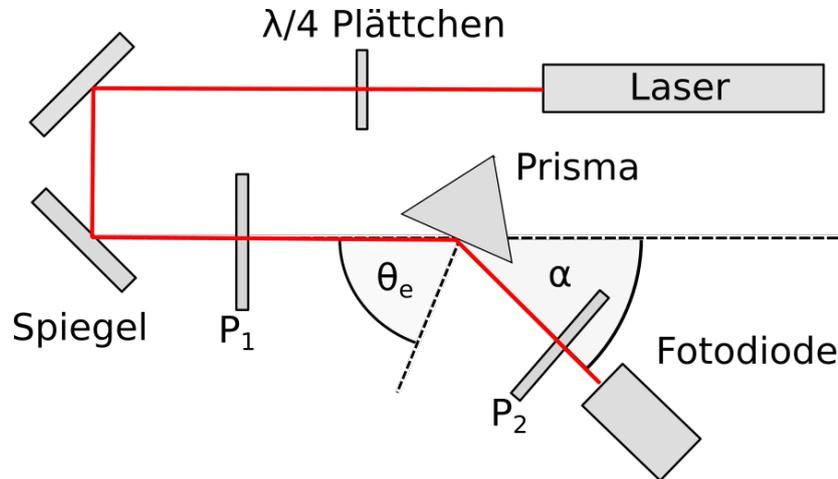


Abbildung 3: In dieser Skizze ist der Aufbau des Versuchs skizziert. Licht wird von einem Laser emittiert und von einem $\lambda/4$ -Plättchen zirkular polarisiert. Mit zwei Spiegeln wird es in den Polarisator P_1 geleitet. Von dort trifft es in dem Winkel θ_e auf das Prisma und der reflektierte Strahl trifft auf einen zweiten Polarisator P_2 , bevor seine Intensität von der Fotodiode gemessen wird.

Der Versuchsaufbau, dargestellt in Abb. 3, besteht aus zwei Polarisatoren P_1 und P_2 , deren Polarisationsrichtung einstellbar ist. Zwischen ihnen befindet sich ein Prisma, das Teile des einfallenden Strahls reflektiert. Hinter P_2 befindet sich eine Fotodiode, die mit einem Signalverstärker und einem Multimeter verbunden ist. Erzeugt der Laser einen Strahl, wird dieser zunächst von einem $\lambda/4$ -Plättchen zirkular polarisiert und dann durch die Polarisatoren und das Prisma geleitet. Die gemessene Lichtintensität auf der Fotodiode ist dann abhängig von den Drehwinkeln der Polarisatoren P_1 und P_2 , sowie dem Reflektionswinkel θ_e auf dem Prisma.

Zu Beginn des Experimentes wird der Analysator P_2 und das Prisma aus dem Strahlengang entfernt. Der Schwenkarm und die Spiegel werden so eingestellt, dass der Laserstrahl die Fotodiode mittig trifft. Dann wird sichergestellt, dass die angezeigte Spannung am Multimeter bei keiner der drei später verwendeten Polarisator P_1 Stellungen (0° , 45° , 90°) die 10 V Marke überschreitet. Ist dies der Fall, wird die Verstärkung entsprechend angepasst. Für die Polarisatorstellungen 0° und 90° werden nun die Spannungen als Referenzmessung zur Normierung notiert.

Für den ersten Teil des Versuches wird das Prisma so auf den Prismensteller gestellt, dass eine Seite die Mitte des Tellers schneidet und der reflektierte Strahl die Fotodiode mittig trifft. Im Folgenden wird die reflektierte Intensität für die P_1 -Stellungen 0° und 90° und die Ablenkwinkel α im Bereich von $10^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ in 5° Schritten gemessen.

Dabei muss das Prisma für jede Einstellung von Hand weitergedreht werden.

Im zweiten Teil des Experimentes wird der Polarisator P_1 auf den Winkel 45° gestellt und der Analysator P_2 wieder, wie in Abb. 3, in den Strahlengang gebracht. Dann wird für die gleichen Ablenkwinkel α wie zuvor, jeweils durch Verstellen von P_2 das Minimum der gemessenen Intensität gefunden. Für diese Minima wird der Stellwinkel von P_2 notiert.

4 Auswertung

4.1 Fresnelsche Formeln

Im ersten Schritt wurden die gemessenen Lichtintensitäten des ersten Versuchsteils normiert über ihrem Reflektionswinkel θ_e zum Lot des Prismas in Abb. 4 aufgetragen. Dieser Winkel berechnet sich durch $\theta_e = \pi/2 - \alpha/2$, da der Ablenkwinkel α gerade dem doppelten Einfallswinkel bezüglich der Reflektionsfläche entspricht. Die Messreihen wurden für vertikal und horizontal polarisiertes Licht aufgenommen und lassen sich daher direkt mit den Fresnelschen Formeln aus Gleichungen (1) und (2) vergleichen. Zu beachten ist jedoch, dass die gemessenen Intensitäten $I \propto E^2$ proportional zum Quadrat der Amplitude der E-Felder sind. Daher ist auch das Quadrat der Gleichungen (1) und (2) aufgetragen. Die Winkelskala des Schwenkarms hatte nur eine grobe Skala von $1 \hat{=} 5^\circ$ und die Unsicherheit wurde zu einem halben Skalenteil geschätzt. Der Fehler von θ_e berechnet sich dann durch $\sigma_{\theta_e} = \sigma_\alpha/2 = 1.25^\circ \approx 1.3^\circ$. Die Unsicherheit der gemessenen Intensitäten wurde aufgrund zeitlich instabiler Messwerte durchweg großzügig abgeschätzt. Daher wird diese Abschätzung anstatt der kleineren Unsicherheit verwendet, die sich aus den Herstellerangaben auf dem Messgerät ergibt. Dieser kleinere Fehler hätte sich für den Messwert M und der letzten Dezimalstelle D durch $\sigma = 0.005 \cdot M + 2D$ berechnet. Durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung ergibt sich die Unsicherheit der normierten Intensität I/I_0 zu:

$$\sigma_{I/I_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_I}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0} I}{I^2}\right)^2}.$$

4.2 Brewster Winkel

Vergrößert man einen Ausschnitt um den Winkel verschwindender Reflektion aus Abb. 4, lässt sich der Brewsterwinkel unserer Messung, ablesen. Dieser vergrößerte Ausschnitt wurde aus Platzgründen hier allerdings nicht mit abgebildet. Der Brewsterwinkel wurde zu $\theta_e = 59^\circ \pm 4^\circ$ abgeschätzt. Aus diesem Winkel lässt sich mit Abschnitt 2.4 der

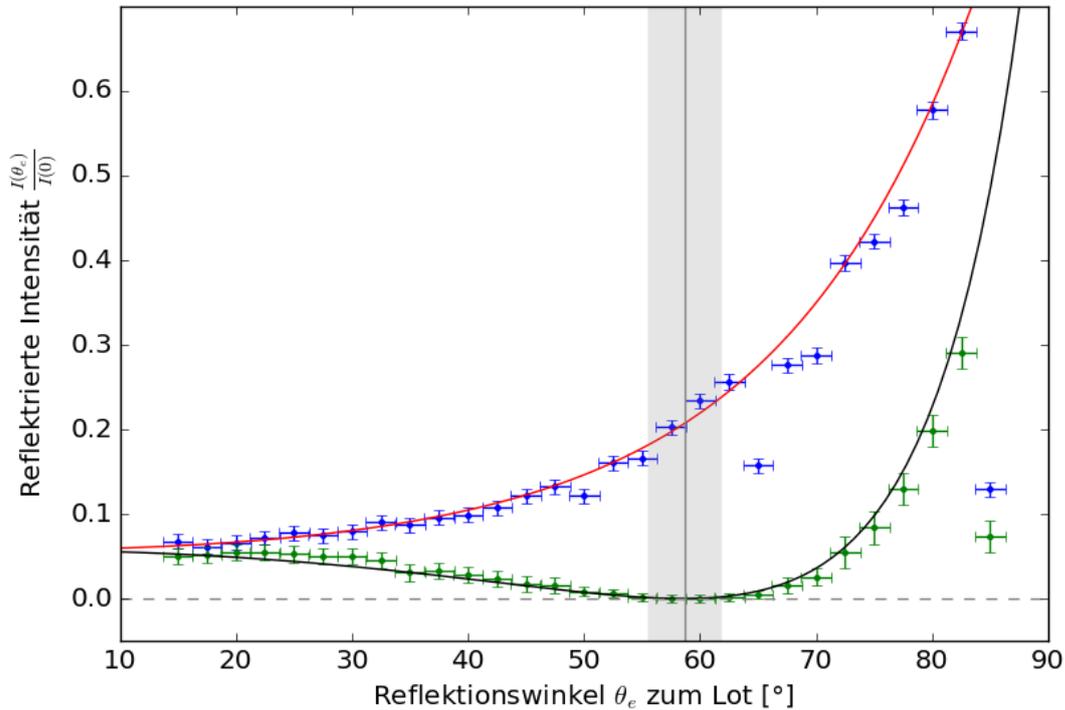


Abbildung 4: Hier sind die gemessenen Lichtintensitäten normiert für parallel (grün) und senkrecht (blau) polarisiertes Licht über dem Reflektionswinkel θ_e aufgetragen. Zum Vergleich wurden $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ (schwarz) und $R_{\perp} = r_{\perp}^2$ (rot) aus den Formeln (2) und (1) dargestellt. Für die Berechnung wurde die Angabe des Brechungsindex von $n_{\text{Glas}} = 1.63$ aus dem Praktikumshandbuch [DPP, S. 51] verwendet.

Brechungsindex des Glasprismas bestimmen. Es gilt nämlich:

$$90^\circ = \theta_e + \theta_t, \quad n_{\text{Luft}} \sin \theta_e = n_{\text{Glas}} \sin \theta_t \quad \text{und} \quad n_{\text{Luft}} \approx 1$$

$$\Rightarrow n_{\text{Glas}} = \frac{\sin \theta_e}{\sin(\pi/2 - \theta_e)} = \frac{\sin \theta_e}{\cos \theta_e} = \tan \theta_e.$$

Nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung hat n_{Glas} dann die Unsicherheit:

$$\sigma_{n_{\text{Glas}}} = \frac{\sigma_{\theta_e}}{\cos^2 \theta_e}.$$

Mit diesen Formeln errechnet sich der Brechungsindex des verwendeten Glasprismas zu $n_{\text{Glas}} = 1.7 \pm 0.3$.

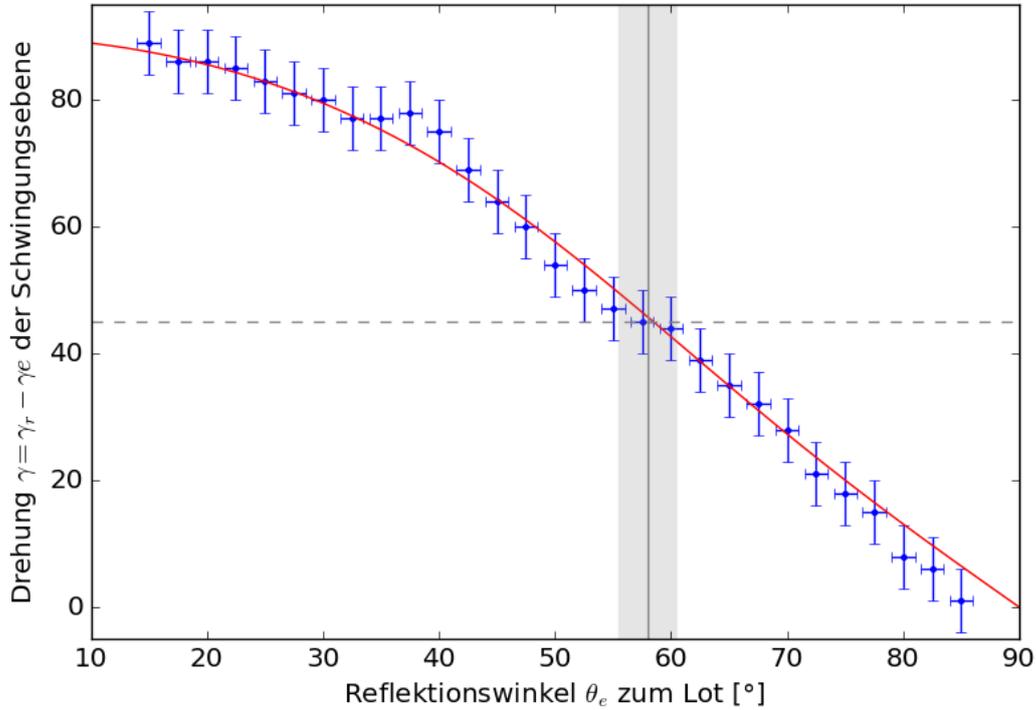


Abbildung 5: Hier sind die Messwerte (blau) für die Drehung γ der Schwingungsebene über dem Einfallswinkel θ_e am Prisma dargestellt. Die Formel (3) der erwarteten Werte (rot) vereinfacht sich für diesen Fall zu $\gamma = -45^\circ + \arctan\left(-\frac{\cos(\theta_e - \theta_t)}{\cos(\theta_e + \theta_t)}\right)$. Zu beachten ist, dass alle negativen Werte und die Kurve zum besseren Vergleich um 180° nach oben verschoben wurden, da γ_r per Definition nicht größer als 90° werden kann, aber $\gamma + \gamma_e > 90^\circ$ werden.

4.3 Drehung der Schwingungsrichtung

Im zweiten Teil des Experimentes wurde die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes auf $\gamma_e = 45^\circ$ gestellt und mit einem Analysator der Winkel γ_r der Schwingungsrichtung nach der Reflektion gemessen. Der Winkel γ_r war schwierig zu identifizieren, und daher wurde die Unsicherheit mit $\sigma_\gamma = 5^\circ$ abgeschätzt. Die Messwerte sind zusammen mit dem erwarteten Verlauf nach Gleichung (3) in Abb. 5 aufgetragen. Wird die Schwingungsebene nun um $\gamma = 45^\circ$ gedreht, so ist die reflektierte Welle ausschließlich senkrecht ($\gamma_r = 90^\circ$) polarisiert. Das parallel polarisierte Licht wird nicht reflektiert und wie zuvor gezeigt wurde, geschieht dies am Brewsterwinkel. Dieser Winkel wurde in Abb. 5 zu $\theta_{\text{Brewster}} = 58^\circ \pm 2^\circ$ abgelesen. Zur Bestimmung des Brechungsindex des Glasprismas können nun die gleichen Formeln wie in Abschnitt 4.2 verwendet werden. Dann berechnet sich der Brechungsindex des Glases zu $n_{\text{Glas}} = 1.60 \pm 0.15$.

5 Diskussion

5.1 Fresnelsche Formeln

In diesem Versuch werden die Fresnelschen Formeln experimentell bestätigt. In Abb. 4 ist zu erkennen, dass die meisten Messergebnisse weniger als einen 1σ -Abstand zu der Erwartungskurve haben. Einzelne weichen jedoch stark ab. Dies ist vermutlich auf einen Fehler bei der Messung zurückzuführen. Das Prisma musste mit hoher Präzision eingestellt werden, da sonst der Laserstrahl nicht mittig auf der Fotodiode auftraf. Das wiederum führte zu verringerter Intensität. Ein weiteres Problem trat bei der Bestimmung der Intensität für sehr flache Winkel auf. Fällt das Licht in einem sehr großen Winkel auf das Prisma, lässt sich nicht verhindern, dass ein Teil des Lichtes von der lichtzugewandten Kante des Prismas gestreut wird. Dies führt zu einer deutlich verfälschten Intensität, die in Abb. 4 bei dem Winkel $\theta_e = 85^\circ$ zu erkennen ist.

5.2 Brechungsindizes

In diesem Versuch wurde der Brechungsindex des Prismenglases auf zwei verschiedene Weisen bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 gegenübergestellt. Zunächst fällt auf, dass der Literaturwert aus dem Praktikumshandbuch im 1σ -Intervall beider Ergebnisse liegt. Außerdem ist das Fehlerintervall des zweiten Ergebnisses deutlich kleiner. Das lässt sich mit einem Blick auf die Abbildungen 4 und 5 erklären. Durch den nahezu linearen Zusammenhang zwischen θ_e und γ in einer Umgebung von $\gamma = 45^\circ$ lässt sich der Brewsterwinkel in Abb. 5 gut ablesen. Anders verhält es sich in Abb. 4, die für die erste Methode verwendet wurde. Hier ändert sich die relative Intensität in einer Umgebung des Minimums nur wenig. Das führt zu einer größeren Unsicherheit bei der Bestimmung des Brewsterwinkels.

	Brechungsindex n_{Glas}
Verschwindende Reflektion	1.7 ± 0.3
Schwingungsrichtung	1.60 ± 0.15
Literaturwert	1.63

Tabelle 1: Hier sind die berechneten Brechungsindizes, sowie die Literaturangabe aus dem Praktikumshandbuch [DPP, S. 51] aufgelistet.

Legt man allerdings starken Wert auf die Größe der Fehlerintervalle, so gibt es noch zwei weitere Möglichkeiten zur Bestimmung des Brechungsindex. Eine Option wäre, einen fehlerbehafteten quadratischen Fit aus ein paar Messwerten um das Minimum in Abb. 4 zu machen. In der Scheitelpunktform wird dann direkt der Brewsterwinkel inklusive Unsicherheit berechnet. Das Gleiche gilt für einen linearen Fit in der Punktsteigungsform

in Abb. 5. Das wäre gerechtfertigt, da sich auch die dazugehörigen Formeln (2) und (3) in den relevanten Bereichen nahezu quadratisch bzw. linear Verhalten. Die andere Möglichkeit wäre, für die Gleichungen (1), (2) und (3) mit dem Freiheitsgrad n jeweils einen χ^2 -Fit zu erstellen. Auch dabei bekäme man ein Ergebnis für den Brechungsindex n_{Glas} des Prismenglases, ohne die Unsicherheit abschätzen zu müssen.

Literatur

- [DEM2] W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*, 6. Auflage, Springer Spektrum 2013
- [LP] P. Schaaf, <http://lp.uni-goettingen.de/get/bigimage/4775.png> (abgerufen 27.12.2016)
- [NOLT] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik*, 9. Auflage, Springer Spektrum 2011
- [ZIN] W. Zinth, U. Zinth, *Optik: Lichtstrahlen - Wellen - Photonen*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag 2013
- [DPP] J. Große-Knetter, P. Schaaf, *Das Physikalische Praktikum*, Band 2, Universitätsverlag Göttingen 2016