

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 31

Zeeman-Effekt

Praktikant/in:

E-Mail:

Tutor:in:

Datum der Durchführung: 11.06.24

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Auswertung	4
2.1	Benötigte Daten für die Auswertung	4
2.2	Normaler Zeeman Effekt	5
2.2.1	Potentielle Energie	5
2.2.2	Experimentelle Bestimmung des Bohrschen Magnetons	5
2.3	Anormaler Zeeman-Effekt	7
2.3.1	Proportionalitätsfaktoren und Konstanten im anomalen Zeeman Effekt	7
2.3.2	Polarisation	8
3	Diskussion	10
4	Anhang	12
4.1	Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression	12
	Literatur	14

1 Einleitung

Der ZEEMAN-Effekt beschreibt die Aufspaltung von Spektrallinien, also das emittierte Licht von möglichen Übergängen von Elektronen in einem Atom, durch die Wechselwirkung von einem äußeren Magnetfeld mit dem magnetischen Moment, dass durch den Elektronenspin entsteht.

Neben der Feinstruktur stellt der ZEEMAN-Effekt damit die erste Aufspaltung der Energieniveaus nach den Bohrschen Bahnen dar und ist somit grundlegend für alle weiteren Betrachtungen in der Quantenmechanik und Kern- und Teilchen-Physik. Der ZEEMAN-Effekt gehört nicht selbst zur Feinstruktur, weil er nur in Atomen in einem äußeren angelegten B-Feld zum Tragen kommt und eben nicht überall.

In diesem Versuch wird der ZEEMAN-Effekt für Cadmium-Atome mit einem FABRY-PÉROT-Interferometer untersucht, das die notwendige Auflösung bereitstellt, die man zur Untersuchung des Effektes benötigt

2 Auswertung

2.1 Benötigte Daten für die Auswertung

Zur weiteren Berechnung verschiedener Werte wird die magnetische Flussdichte B benötigt. Am Aufbau konnte jedoch nur die Stromstärke I durch die Spulen gemessen werden. Um die Umrechnung dieser in die magnetische Flussdichte zu ermöglichen, ist an jedem Aufbau ein Zettel ausgelegt, dem einige Datenpunkte für den Zusammenhang von B und I zu entnehmen sind. Aus diesem Plot wurden die Werte abgelesen¹, und mittels linearer Regression in Python wurde eine Gerade durch diese Punkte gelegt. Aus dieser Geraden lässt sich das B-Feld berechnen mit einem Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5 von

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_m^2 \cdot I^2 + \sigma_I^2 \cdot m^2}, \quad (2.1.1)$$

wobei $m = (0,0499 \pm 0,0006) \frac{\text{T}}{\text{A}}$ beträgt.

In folgender Tabelle 1 sind die Quantenzahlen der Zustände angegeben, die sich aus der Nomenklatur $n^{2 \cdot S+1}L_J$ ergeben, wobei n die Hauptquantenzahl, S der Spin, L der Drehimpuls und $J = |L \pm S|$ der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle sind. Für L sind S, P, D, F Benennungen der Zahlen von 0 bis 3 in dieser Reihenfolge. λ ist die Wellenlänge, welche dem normalen bzw. anormalen ZEEMAN-Effekt für Cadmium entspricht.

ZEEMAN-Effekt	Übergang	Wellenlänge λ [nm]	n	S	L	J	g_J
normal	3^1D_2	643,85	3	0	2	2	1
	$\rightarrow 2^1P_1$		2	0	1	1	1
anormal	2^3S_1	508,58	2	1	0	1	2
	2^3P_2		2	1	1	2	1,5

Tabelle 1: Quantenzahlen und LANDÉ-Faktoren der jeweiligen Zustände vor und nach dem Übergang

Für den normalen Effekt lässt sich aus Tabelle 1 sofort erkennen, dass der Spin 0 ist. Der Übergang von 3^1D_2 zu 2^1P_1 entspricht einer Änderung der Drehimpulsquantenzahl von $\Delta L = -1$. Damit sind die optischen Auswahlregeln erfüllt.

¹Zum Ablesen wurde das online-Tool automeris.io verwendet, da dieses genaueres Ablesen ermöglicht, als mit dem Auge auf dem Plot möglich wäre. Der Fehler durch dieses Tool ist nicht genau bekannt, da es in der Lage ist, mehr als 10 Stellen nach dem Komma anzugeben, somit wurde der Fehler großzügig auf $\sigma_I = 0,1 \text{ A}$ und $\sigma_B = 0,01 \text{ T}$ geschätzt. Diese Fehler sind definitiv größer als die tatsächliche Genauigkeit des Tools, beziehen aber mit ein, dass die Genauigkeit des Plots, aus dem die Daten entnommen wurden, unbekannt ist sowie Ungenauigkeiten beim Festlegen der Achsen und Auswählen der Punkte im Tool

2.2 Normaler Zeeman Effekt

2.2.1 Potentielle Energie

Die potentielle Energie bei dem normalen ZEEMAN-Effekt beträgt

$$E_{\text{pot}} = m\mu_B B \quad (2.2.1)$$

mit der Magnetquantenzahl m . Die Änderung der potentiellen Energie ergibt sich folglich zu

$$\Delta E_{\text{pot}} = (m_{\text{nachher}} - m_{\text{vorher}})\mu_B B = \Delta m\mu_B B. \quad (2.2.2)$$

Bei optischen Übergängen ist $\Delta m = \pm 1$ oder 0. Also ist die Proportionalitätskonstante zwischen ΔE_{pot} und B gerade $\pm\mu_B$ oder 0.

2.2.2 Experimentelle Bestimmung des Bohrschen Magnetons

Die Berechnung der Differenz der inversen Wellenlänge $\Delta\lambda^{-1}$ erfolgt nach der Formel

$$\Delta\lambda^{-1} = \frac{1}{2nl} \left(\frac{r_{2,j}^2}{r_{2,j}^2 - r_{1,j}^2} + \frac{r_{2,j+1}^2}{r_{2,j+1}^2 - r_{1,j+1}^2} \right) \quad (2.2.3)$$

mit einem Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5 von

$$\sigma_{\Delta\lambda^{-1}} = \frac{\sigma_r}{2nl} \cdot \left(\frac{4r_{1,j}^2 r_{2,j}^2}{(r_{2,j}^2 - r_{1,j}^2)^4} (r_{1,j}^2 + r_{2,j}^2) + \frac{4r_{1,j+1}^2 r_{2,j+1}^2}{(r_{2,j+1}^2 - r_{1,j+1}^2)^4} (r_{1,j+1}^2 + r_{2,j+1}^2) \right), \quad (2.2.4)$$

wobei $r_{i,j}$ der j -te Radius in der i -ten Ordnung ist, sodass sich mit drei Radii pro Ordnung zwei Werte für $\Delta\lambda^{-1}$ für jeden Spulenstrom ergeben, die anschließend mit dem gewichteten Mittelwert nach Gleichung 4.1.2 gemittelt werden. n bezeichnet den Brechungsindex im Interferometer und l die Dicke der Quarzscheibe. Beide Angaben sind in [1, S. 100] zu finden.

Aus den gemessenen Flächen A erhält man den quadrierten Radius sofort durch $r^2 = \frac{A}{\pi}$, wobei für r^2 ein Fehler von

$$\sigma_{r^2} = \left| \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right| \quad (2.2.5)$$

angenommen wird, bei dem r_1 und r_2 zwei benachbarte Linien sind.

Für diese Datenpunkte ($B, \Delta\lambda^{-1}$) wird eine lineare Regression durchgeführt. Für die Parameter ergibt sich

$$m = (70 \pm 50) \text{ T}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ b \approx -7,8 \text{ m}^{-1}.$$

Dieses Vorgehen ist nochmal in Abbildung 2.1 dargestellt.

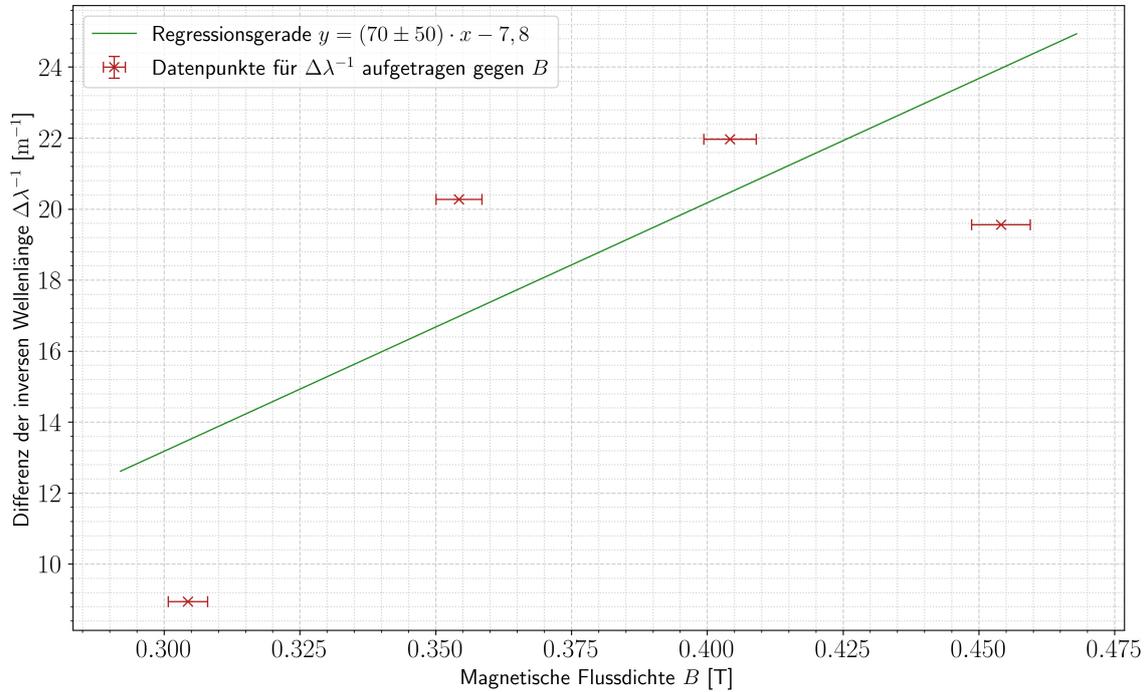


Abbildung 2.1: Datenpunkte ($B, \Delta\lambda^{-1}$) mit linearer Regression mit den in der Legende eingetragenen Parametern; eigene Darstellung

Da die Differenz der potentiellen Energie in Form eines Photons abgegeben wird, gilt die Energiegleichheit

$$\mu_B B = h\nu = h \frac{c}{\Delta\lambda}, \quad (2.2.6)$$

welche sich zu

$$\mu_B = hc \cdot \frac{\Delta\lambda^{-1}}{B} \quad (2.2.7)$$

umformen lässt. Mit der Geradensteigung $m = \frac{\Delta\lambda^{-1}}{B}$ erhält man die Formel

$$\mu_B = hc \cdot m \quad (2.2.8)$$

mit Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5

$$\sigma_{\mu_B} = hc\sigma_m. \quad (2.2.9)$$

Damit erhält für μ_B experimentell bestimmt

$$\mu_{B, \text{exp}} = (1,3 \pm 0,9) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}}.$$

2.3 Anormaler Zeeman-Effekt

Der anomale Zeeman Effekt wird beim Übergang von 2^3S_1 zu 2^3P_2 beobachtet. Die entsprechenden Quantenzahlen sind in Tabelle 1 dargestellt.

2.3.1 Proportionalitätsfaktoren und Konstanten im anomalen Zeeman Effekt

Der Landé-Faktor g_j kann nun mit

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (2.3.1)$$

berechnet werden. Damit ergeben sich die beiden Zustände für den anomalen Zeeman Effekt zu $g_{J_1} = 2$ und $g_{J_2} = 1, 5$. Die Quantenzahl m_J ist gegeben als $|m_J| < L + \frac{1}{2}$, wobei m_J in ganzzahligen Schritten läuft. Dies gibt die möglichen Werte $m_{J_1} = \pm\frac{1}{2}$ und $m_{J_{2,1}} = \pm\frac{3}{2}$, $m_{J_{2,2}} = \pm\frac{1}{2}$. Die Energie lässt sich nun mit $E = g_J \mu_B m_J B$ und den Dipol-Auswahlregeln bestimmen, damit folgen die möglichen Werte für die Energiedifferenz der beiden Zustände

$$\Delta E = \mu_B B \cdot (g_{J_2} m_{J_2} - g_{J_1} m_{J_1}) \quad (2.3.2)$$

$$= \kappa \mu_B B \quad (2.3.3)$$

$$= \pm 1, 25 \mu_B B \quad (2.3.4)$$

$$= \pm 0, 25 \mu_B B \quad (2.3.5)$$

$$= \pm 1, 75 \mu_B B \quad (2.3.6)$$

$\Delta\lambda^{-1}$ kann nun nach dem selben Vorgehen wie in Unterabschnitt 2.2 berechnet werden. Dabei wird dieses mal das Bohrsche Magneton $\mu_B = 9,2740100783 \cdot 10^{-24}$ als gegeben angenommen und stattdessen der Proportionalitätsfaktor κ bestimmt. Hierbei wird verwendet, dass

$$\Delta E = \Delta\lambda^{-1} h c = \kappa \mu_B B \quad (2.3.7)$$

als Zusammenhang der inversen Wellenlängendifferenz und der Energiedifferenz gilt, mit der Planck-Konstante h und der Lichtgeschwindigkeit c . Auch hier muss nach Unterabschnitt 2.1 der Wert für B erst aus dem gemessenen Strom bestimmt werden und der entsprechende Fehler dazu mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5 bestimmt werden. Aus $\Delta\lambda$ wird nun die Energiedifferenz nach obiger Formel bestimmt mit dem Fehler auch nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5 mit

$$\sigma_{\Delta E} = \sqrt{\sigma_{\Delta\lambda}^2 \cdot h^2 c^2} \quad (2.3.8)$$

und gegen B geplottet. Mittels Pythons Optimize Funktion wird dann ein linearer Fit bestimmt, dessen Steigung κ entspricht. Dieser Plot ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

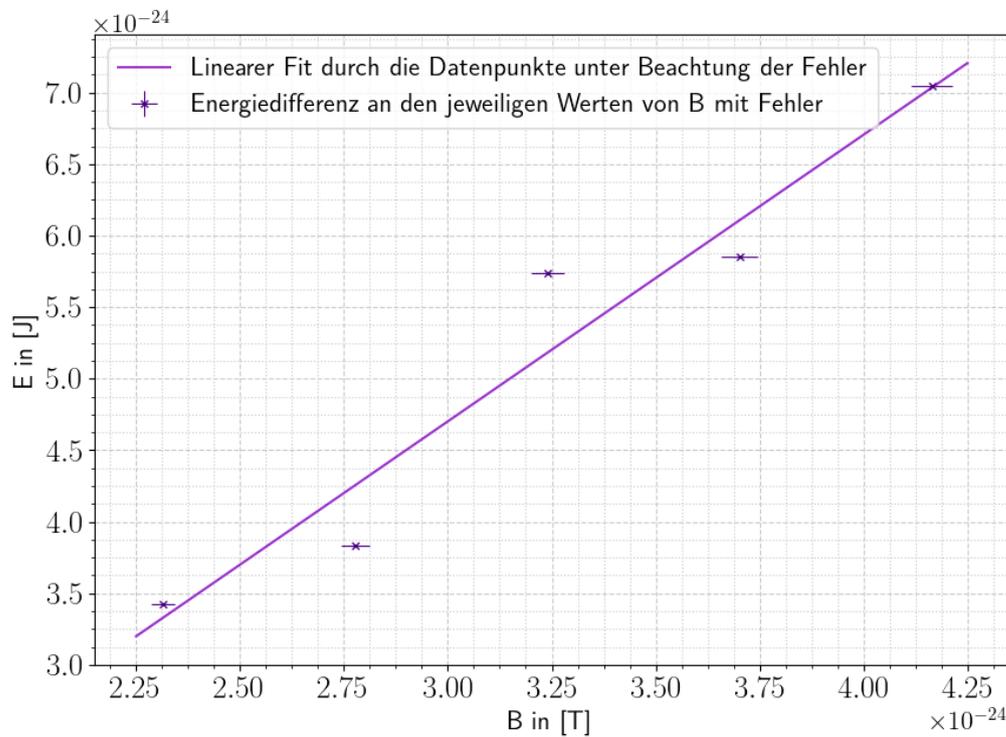


Abbildung 2.2: Energiedifferenz bestimmt aus $\Delta\lambda^{-1}$ aufgetragen gegen B , linearer Fit durch die Datenpunkte mittels Pythons Optimize.

Dieser Plot ergibt einen Wert von $\kappa = 2,0 \pm 0,4$.

2.3.2 Polarisation

Die Aufnahmen der CCD-Kamera mit Polarisationsfilter und Rotfilter bzw. Interferenzfilter sind in Abbildung 2.3 und Abbildung 2.4 zu sehen. In beiden Abbildungen erkennt man im linken Bild eine Aufspaltung in zwei Linien, welche den Werten $\Delta m_J = \pm 1$ entsprechen. Diese vertikal polarisierten Linien werden als π -Linien bezeichnet. Theoretisch sollten an dieser Stelle vier Linien erkennbar sein. Auf den rechten Bildern beider Abbildungen erkennt man keine Aufspaltung der Linien, diese werden also nicht verschoben und entsprechen folglich dem Wert $\Delta m_J = 0$. Diese Linien sind horizontal polarisiert und werden als σ -Linie bezeichnet.

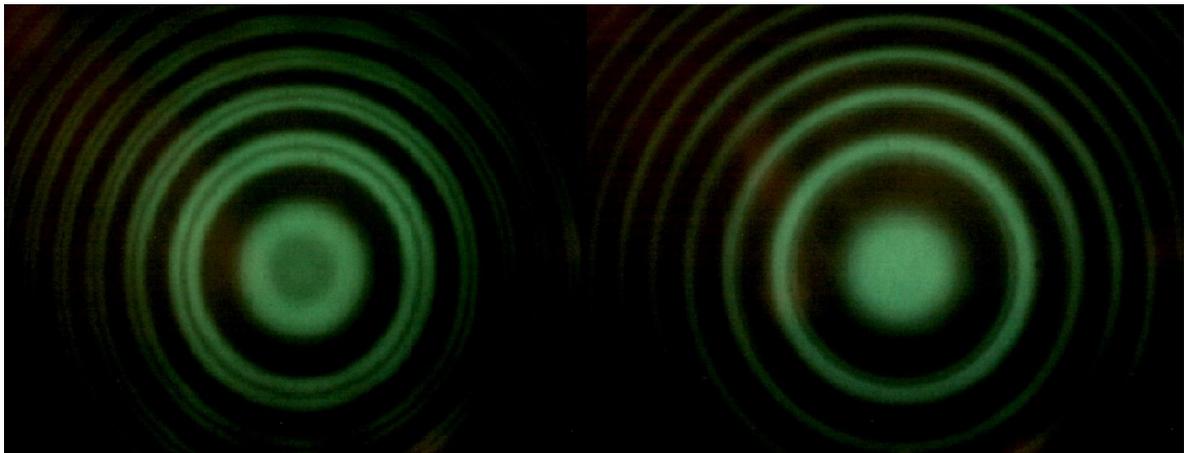


Abbildung 2.3: CCD-Kamera Aufnahmen des emittierten Lichts mit Interferenzfilter, bei transversaler Beobachtung mit einem Spulenstrom von $I = 5\text{ A}$, links mit dem Polarisationsfilter auf 0° , rechts 90°



Abbildung 2.4: CCD-Kamera Aufnahmen des emittierten Lichts mit Rotfilter, bei transversaler Beobachtung mit einem Spulenstrom von $I = 5\text{ A}$, links mit dem Polarisationsfilter auf 0° , rechts 90°

3 Diskussion

Für diese Protokoll wurden durch den Tutor zur Verfügung gestellte Messwerte desselben Experiments von einem anderen Tag der Durchführung verwendet. Am Tag des Versuches gelang es keiner einzigen Gruppe, alle benötigten Messwerte aufzunehmen, die meisten waren nicht einmal in der Lage, überhaupt Messwerte zu nehmen. Der Grund dafür ist, dass das Experiment bereits an der Justierung des Aufbaus scheiterte. Es war nahezu unmöglich, alle Teile auf der optischen Schiene so zu justieren, dass das Licht an der CCD-Kamera noch genug Intensität hatte, um auf dem PC irgendetwas sehen zu können. Auch die Ausrichtung des Interferometers hatte einen unglaublich großen Einfluss auf die Sichtbarkeit des Bildes. Eine kleinste Bewegung des Interferometers veränderte das sichtbare Bild so stark, dass sogar das Loslassen des Interferometers ein gut sichtbares Interferenzbild komplett aus dem sichtbaren Bereich der Kamera bewegte. Auch konnte das Bild nicht scharf gestellt werden. Die automatischen Einstellungen des Computer-Programmes machten das Bild komplett unverwendbar, da meist nur ein großer weißer Fleck zu sehen war. Das Programm ist nicht besonders benutzerfreundlich, sodass das Ändern dieser Einstellungen zwar Muster sichtbar machte. Diese konnten aber nicht so scharf gestellt werden, dass mehr als sehr breite Bänder an Licht zu sehen waren.

Da auch die zu dieser Auswertung verwendeten Daten keine scharfen Linien aufweisen, wurde die Fehlerrechnung hier großzügiger abgeschätzt als unter normalen Umständen². Zu guter Letzt ist noch anzumerken, dass die Anleitung zu diesem Versuch selbst für die übliche Qualität des Handbuches ausgesprochen schlecht ist. Die genaue Verkabelung des Aufbaus musste weitgehend in der gesamten Gruppe durch Raten gemacht werden, auch die Reihenfolge der Linsen ist im Handbuch mit keinem Wort erwähnt, wobei zusätzlich aus dem Buch nicht hervorging, dass drei Linsen verwendet werden sollten. Dies war lediglich im Video des Versuches zu sehen. Zusätzlich zu den weggelassenen Informationen gibt es an mehreren Stellen eine Doppelung von Anweisungen, welche einen nicht weniger verwirrenden Effekt hatte.

Bei dem normalen ZEEMAN-Effekt ist der Kern der Auswertung die Abbildung 2.1 und das Ergebnis für das BOHRsche Magneton von $\mu_B = (1,3 \pm 0,9) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}}$, welches sich in einem 1σ -Intervall zu dem Theoriewert von $\mu_B = 9,2740100783(28) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$ befindet.

Allerdings wurde jener Wert mit der Geradensteigung aus Abbildung 2.1 berechnet. Wie zu sehen ist, bilden die Daten entgegen der Erwartung keinen wirklichen linearen Zusammenhang, sodass der Korrelationskoeffizient nur $r \approx 0.7322$ beträgt. Dieser Umstand besteht aber nur in dieser Messreihe, während in Abbildung 2.2 sich ein recht schöner linearer Zusammenhang ergibt.

²Unter anderem ist unklar, wie stark die Schwankungen des Multimeters waren und wie verlässlich die Messwerte des verwendeten Programms sind.

Das deutet darauf hin, dass sich jener Umstand aus einem einmaligen systematischen Messfehler ergibt, da für Abbildung 2.2 dieselbe Methode für die Datenauswertung verwendet wurde. Wie an dem geringen Sigma-Intervall von μ_B zu sehen ist, ist die Geradensteigung von $m = (70 \pm 50) \frac{1}{\text{Tm}}$ immer noch recht genau, wobei sich der große Fehler der Geradensteigung auch entsprechend auf den großen Fehler von μ_B im Verhältnis zum Wert niederschlägt. Damit hätten wir uns gewünscht, dass man das BOHRsche Magneton etwas genauer messen kann.

Abschließend kann noch gesagt werden, dass für die Messung für einen Spulenstrom von $I = 5 \text{ A}$ kein Datenpunkt $(B, \Delta\lambda - 1)$ berechnet werden konnte, da hier keine zweite Ordnung des Interferenzmusters gemessen wurde. Mit diesem zusätzlichen Datenpunkt wäre es möglich gewesen, dass die Gerade aus Abbildung 2.1 korrigiert worden wäre.

Die für den anormalen Zeeman Effekt bestimmte Proportionalitätskonstante von $\kappa = 2,0 \pm 0,4$ liegt in einem 1σ -Intervall zu dem möglichen berechneten Wert der Energiedifferenzen der Übergänge von $\Delta E = 1,75 \mu_B B$. Damit ist davon auszugehen, dass dies der hier beobachtete Übergang war.

4 Anhang

4.1 Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden): wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1.1)$$

Gewichteter Mittelwert: wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (4.1.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (4.1.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (4.1.4)$$

Fehlerfortpflanzung: die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \cdot \frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 + \left(\sigma_B \cdot \frac{\partial f}{\partial B}\right)^2} \quad (4.1.5)$$

Lineare Regression: die Steigung m und der Achsenabschnitt b des linearen Fits werden – wenn benutzt – durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.1.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.1.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (4.1.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (4.1.9)$$

Literatur

- [1] Peter Schaaf and Jörn Große-Knetter. *Das Physikalische Praktikum, Handbuch 2023/2024 für Studentinnen und Studenten der Physik, Band II*. Universitätsverlag Göttingen, 2023.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Datenpunkte $(B, \Delta\lambda^{-1})$ mit linearer Regression mit den in der Legende eingetragenen Parametern; eigene Darstellung	6
2.2	Energiedifferenz bestimmt aus $\Delta\lambda^{-1}$ aufgetragen gegen B , linearer Fit durch die Datenpunkte mittels Pythons Optimize.	8
2.3	CCD-Kamera Aufnahmen des emittierten Lichts mit Interferenzfilter, bei transversaler Beobachtung mit einem Spulenstrom von $I = 5 \text{ A}$, links mit dem Polarisationsfilter auf 0° , rechts 90°	9
2.4	CCD-Kamera Aufnahmen des emittierten Lichts mit Rotfilter, bei transversaler Beobachtung mit einem Spulenstrom von $I = 5 \text{ A}$, links mit dem Polarisationsfilter auf 0° , rechts 90°	9

Tabellenverzeichnis

1 Quantenzahlen und LANDÉ-Faktoren der jeweiligen Zustände vor und nach dem Übergang 4