

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 13
Messung großer Widerstände

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 15.06.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Entladung von Kondensatoren	4
2.2	Eingangswiderstand vom Oszilloskop	4
2.3	R-L-C-Schwingkreise	4
3	Durchführung	6
3.1	Aufbau	6
3.2	Experiment	6
4	Auswertung	9
4.1	Bestimmen der benötigten Konstanten	9
4.1.1	Bestimmung der Eichkonstanten	9
4.1.2	Bestimmung der elektrischen Feldkonstanten	9
4.2	Berechnungen durch den RC-Schwingkreis	11
4.2.1	Bestimmung des unbekannte Widerstandes und des Isolationswiderstandes	13
4.2.2	Bestimmung der Kapazität des Kondensators und des Eingangswiderstand des Oszilloskops	14
4.2.3	Bestimmung des unbekanntes Widerstands	17
4.3	Berechnungen durch den RLC-Schwingkreis	19
4.4	Theoretische Werte und Vergleiche	19
4.4.1	Vergleich der Induktivität der Luftspule	20
5	Diskussion	21
6	Anhang	23
6.1	Vom Oszilloskop ausgegebene Plots zum Spannungsverlauf	23
6.2	Fehlerformeln	28
	Literatur	30

1 Einleitung

Der elektromagnetische Schwingkreis kann analog zum mechanischen Aufbau des Federpendels oder des Pohlschen Rads betrachtet werden. Dann entspricht die potentielle Energie der Masse m im Falle des Federpendels der elektrischen Energie, die im Kondensator gespeichert ist. Die Ladungen im Kondensator wird über ein e Spule mit der Induktivität L entladen. Die magnetische Energie im Magnetfeld B der Spule entspricht dann der kinetischen Energie des Pendelsstücks. Der Strom I induziert eine Spannung in der Spule, die wegen der Lenzschen Regel der Richtung des entladenen Stroms entgegengerichtet ist. Die Spannung treibt den Strom zurück in den Kondensator. Damit ist die Dämpfung dieser harmonischen Schwingung der Widerstand der Spule R_L . Dieser Analogie, zu sehen in Abbildung 1, soll in diesem Versuch betrachtet werden.

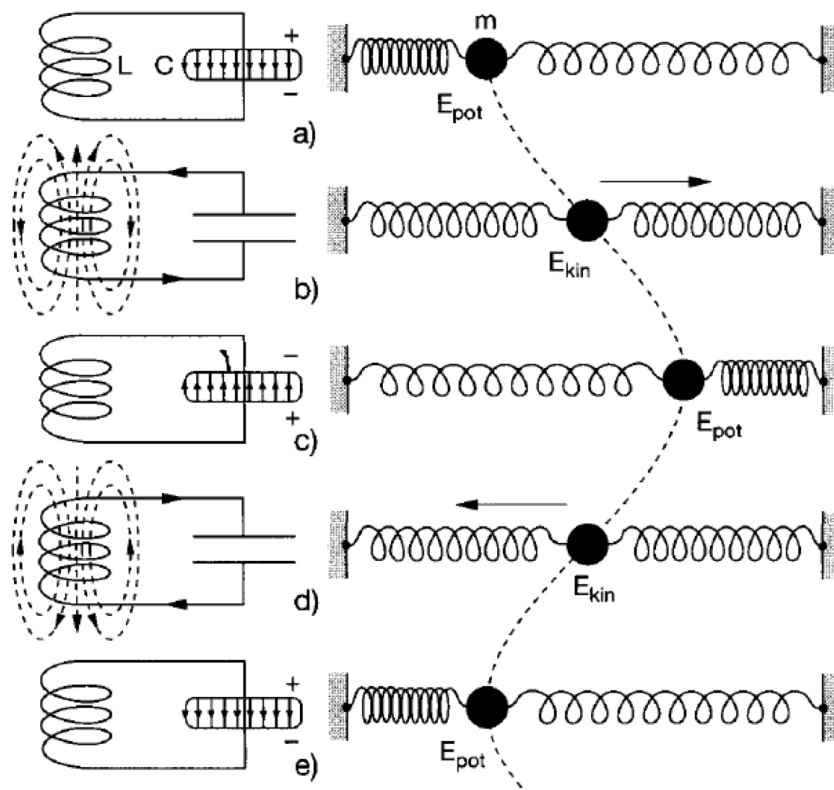


Abbildung 1: Veranschaulichung der Analogie eines harmonischen Oszillators in der Mechanik zu einem RLC-Schwingkreis in der Elektrotechnik; aus [3]

Weiterhin werden diese Schwingkreise und Entladungsvorgänge eines Kondensators über große Widerstände benutzt, ob eben diese Widerstände experimentell errechnen und so bestimmen zu können, da eine bloße Messung so großer Widerstände durch den eigenen Widerstand des Messgerät und die nach $U = R \cdot I$ kleinen Ströme nicht möglich ist.

2 Theorie

2.1 Entladung von Kondensatoren

Für einen voll aufgeladenen Kondensator gilt nach [6, S.283] $C = \frac{Q_0}{U_0} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$, wobei C die Kapazität, Q_0 die Ladung und U_0 die Spannung zur Zeit $t = 0$, ϵ_0 und ϵ_r Dielektrizitätskonstanten, d der Abstand zwischen den Platten und A die Fläche der Platten ist. Beim Entladen des Kondensators gilt außerdem $Q = CU$; $I = \frac{U}{R}$; $-\frac{dQ}{dt} = I$, woraus sich die Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (2.1.1)$$

ergibt, vergleiche [7, S.105]. Die Lösung dieser Differentialgleichung beschreibt den zeitlichen Verlauf der Ladung als

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} \cdot t\right). \quad (2.1.2)$$

Mit dem Quotienten der Ladung zu zwei verschiedenen Zeiten kann man nun den Widerstand bestimmen durch

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \cdot \ln\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)}. \quad (2.1.3)$$

2.2 Eingangswiderstand vom Oszilloskop

Zusätzlich zum im Stromkreis angeschlossenen Widerstand muss der Eingangswiderstand des verwendeten Oszilloskops beachtet werden.

Für Widerstände in Parallelschaltung gilt $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{Osz}}$.

Definiere nun folgende Werte:

$$a = R_{Osz}C, \quad (2.2.1)$$

$$b = R_gC = a \frac{R_2}{R_{Osz} + R_2}. \quad (2.2.2)$$

Für R_{Osz} gilt dann

$$R_{Osz} = \left(\frac{a}{b} - 1\right) R_2. \quad (2.2.3)$$

2.3 R-L-C-Schwingkreise

In einem Wechselstromkreis mit einer Spule, einem Kondensator und einem Ohmschen Widerstand gilt für die Spannungen über den entsprechenden Komponenten $U_R = R \cdot I$; $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$; $U_C = \frac{Q}{C}$. Es gilt dabei auch $\dot{Q} = I$, was insgesamt die folgende Differentialgleichung ergibt (vgl. [6, S. 389-398]):

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \iff \ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (2.3.1)$$

Dies ist die Gleichung für eine gedämpfte harmonische Schwingung, mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, wobei $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Das logarithmische Dekrement Λ wird nun bestimmt durch folgende Gleichung, vgl. [6, S.167]:

$$\Lambda = \frac{R}{2L}T. \quad (2.3.2)$$

Um diese Gleichung nach L umzustellen, werden zunächst noch ein paar Substitutionen eingeführt:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ und } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (2.3.3)$$

$$\Lambda = \beta T \quad (2.3.4)$$

$$\iff \Lambda = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} T \quad (2.3.5)$$

$$\iff \Lambda^2 = \left(\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2} \right) T^2 \quad (2.3.6)$$

$$\iff \frac{\Lambda^2}{T^2} = \frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (2.3.7)$$

$$\iff \frac{1}{LC} = \frac{\Lambda^2}{T^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (2.3.8)$$

$$\iff LC = \frac{T^2}{\Lambda^2 + 4\pi^2} \quad (2.3.9)$$

$$\iff L = \frac{T^2}{C(4\pi^2 + \Lambda^2)}. \quad (2.3.10)$$

$$(2.3.11)$$

Die Kapazität des Kondensators berechnet sich nach [4]¹ durch

$$C_n = (n - 1)\epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \left(\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right) \right), \quad (2.3.12)$$

wobei n die Anzahl der Platten des Kondensators, r der Plattenradius, d der Plattenabstand und ϵ_0 bzw. ϵ_r die Dielektrizitätskonstante ist.

¹Dies ist die Quelle, die für diese Formel im Handbuch angegeben ist, durchsehen des Buches ergab leider, dass sich diese Formel dort nicht finden lässt.

3 Durchführung

3.1 Aufbau

In dem Versuchsraum gibt es verschiedene Plätze, deren Nummer zu notieren ist. Die Bestandteile der Schaltungen im Versuch sind exemplarisch in Abbildung 2 gezeigt. Im Verlauf der Durchführung werden diese Komponenten in verschiedenen Zusammenstellungen verschaltet.

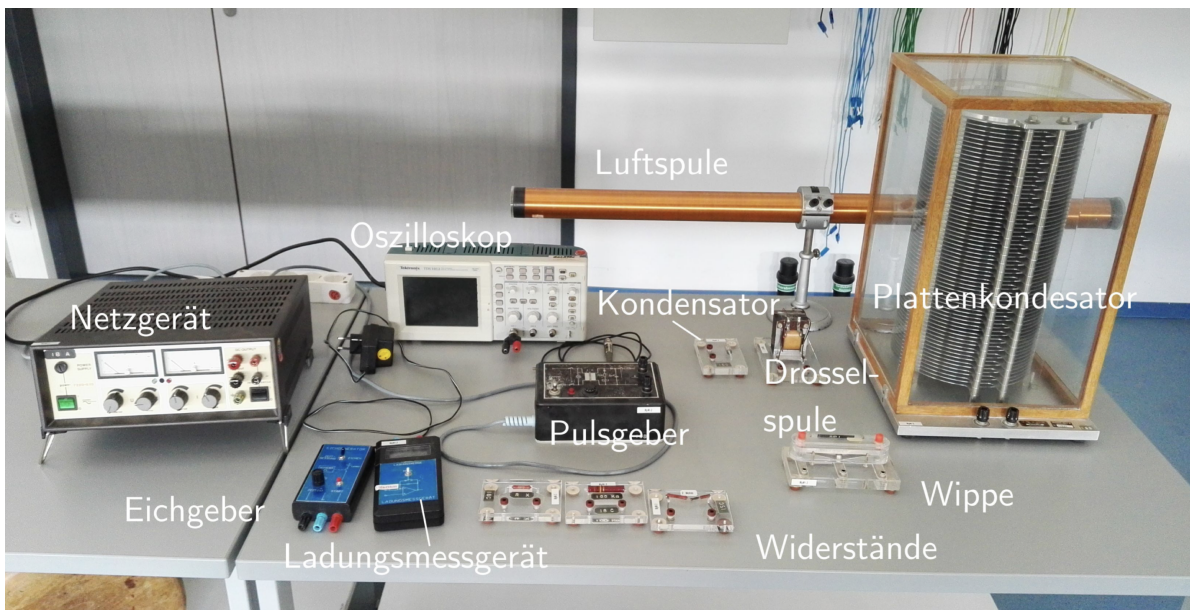
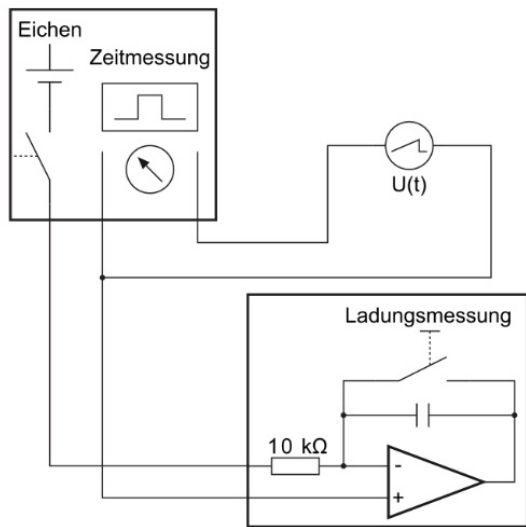


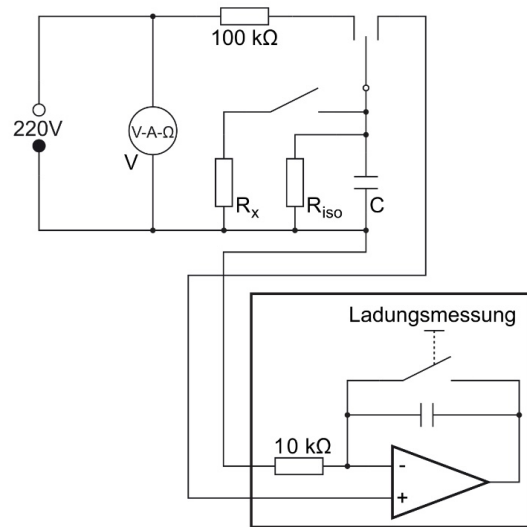
Abbildung 2: Überblick aller Bestandteile des Aufbaus des Versuches bis auf Kabel; aus [2]

3.2 Experiment

Durchführungspunkt 1: Erster Schritt der Durchführung ist die Kalibrierung des Ladungsmessgeräts – auch genannt Stromintegrator – in Amperésekunden (Coulomb). Dazu wird für fünf Messungen der Eichgenerator mithilfe des Oszilloskops auf fünf unterschiedlich lange Spannungspulse eingestellt. Pro Messung wird genau ein Puls auf den Integrator geschickt und der Wert der resultierenden Spannung am Integrator abgelesen. Der Eingangswiderstand des Integrators R_v und die Spannung U_t sind zu notieren. Der Schaltplan der Eichung kann in Abbildung 3a nachvollzogen werden. Aus dieser Messung wird die Eichkonstante κ bestimmt.



(a) Schaltplan für den Durchführungsteil 1



(b) Schaltplan für den Durchführungsteil 2

Durchführungspunkt 2: Als Nächstes wird die Entladung des Kondensators betrachtet.

a) Mit der Wippe, zu sehen in Abbildung 2, wird der Plattenkondensator mit 220 V aufgeladen und über den Messkreis (Abbildung 3b) entladen. Aus fünf Messungen ist die Ladung auf dem Kondensator $Q_0(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ s aufzunehmen. Die Werte dieser Messung und aus Durchführungsteil 1 werden verwendet, um die elektrische Feldkonstante ϵ_0 durch die Kapazität des Plattenkondensators (ganz rechts in Abbildung 2) zu bestimmen.

b) Nun wird der unbekannte Widerstand R_x zum Plattenkondensator parallel geschaltet, also wird der Schalter aus Abbildung 3b geschlossen. Der Kondensator wird aufgeladen und nach Zeiten t : 0 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s, 20 s, 30 s und 60 s, über den Stromintegrator entladen, wobei die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator nach t Sekunden aufzuschreiben ist. Die Messung ist beendet, wenn die Messwerte unter 0,01 Skalenteile fallen. Daraus wird der unbekannte Widerstand R_x bestimmt.

c) Die Messung wird ohne Widerstand R_x (Schalter offen) fünfmal für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 10$ min wiederholt, wobei erneut die Messungen für Ladungsmesswerte unter 0,01 Skalenteilen abzubrechen ist. Für den Fall wird eine Messung für eine kleinere Zeit, bspw. 7 statt 10 min, wiederholt.

Durchführungspunkt 3: Der Versuch wird nach Abbildung 3 umgebaut. Dabei wird sowohl die Masse des Oszilloskops und ein Pol des Impulsgenerators geerdet. Der Impulsgenerator lädt nun den Kondensator auf. Dabei wird die von der Zeit abhängige Spannung $U(t)$ mit dem Digitaloszilloskop aufgezeichnet.

Es sind die folgenden Schaltkreise aufzubauen und dafür der Spannungsverlauf zu messen:

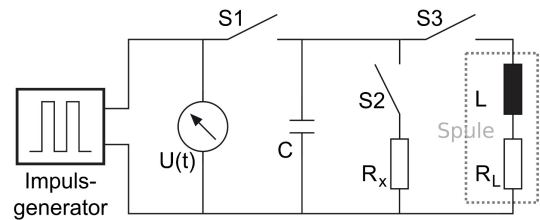


Abbildung 3: Schaltplan des Schwingkreises zu Durchführungspunkt 3

- Impulsgenerator allein
- mit Plattenkondensator
- Plattenkondensator mit $R = 2000 \Omega$ parallel
- Plattenkondensator mit R_x parallel
- Plattenkondensator mit Luftspule parallel

Eingangswiderstand und -kapazität des Oszi sind aus der Anleitung oder Vorderseite eben jenes zu entnehmen.

Aus dieser Messung ist der Eingangswiderstand des Oszilloskops R_{Oszi} und die Kapazität C des Kondensators zu berechnen.

Durchführungspunkt 4: Mit dem Multimeter werden der Ohmsche Widerstand R_L der Luftspule, der Widerstand R_2 (idealerweise $2 \cdot 10^6 \Omega$), der des Plattenkondensators R_C und der Widerstand R_x gemessen und die Maße der Luftspule, gegeben am Versuchsplatz, notiert.

Durchführungspunkt 5: Die Kapazität C_{Pl} des Plattenkondensators mit dem Multimeter ist zu messen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmen der benötigten Konstanten

4.1.1 Bestimmung der Eichkonstanten

Zunächst wird die Eichkonstante des Stromintegrators bestimmt. Dabei gilt die Gleichung $Q = \kappa \cdot x$ mit der Ladung Q , dem vom Stromintegrator angezeigten Wert x , und der zu bestimmenden Eichkonstanten κ .

Die Ladung bestimmt man durch $Q = \frac{U \cdot t}{R}$. Dabei ist $U = (12 \pm 1) \text{ V}$, und der Vorwiderstand des Stromintegrators ist $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Zeit der Impulse in s	Eichkonstante κ in $\frac{\text{C}}{\text{Skt.}}$	Zugehöriger Fehler in $\frac{\text{C}}{\text{Skt.}}$
0,001	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-7}$
0,0015	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$\pm 0,5 \cdot 10^{-7}$
0,002	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$\pm 0,4 \cdot 10^{-7}$
0,003	$2,12 \cdot 10^{-5}$	$\pm 0,10 \cdot 10^{-5}$
0,004	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$\pm 0,20 \cdot 10^{-7}$
Mittelwert	$6,4 \cdot 10^{-7}$	$\pm 0,7 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 1: Eichkonstante für die fünf verwendeten Zeitimpulse, wobei für den Mittelwert der Messwert für 0,003 s vernachlässigt wurde.

In Tabelle 1 wurde der Mittelwert der aus den Impulsen bestimmten Eichkonstante gebildet. Hierbei wurde der Messwert bei 0,003 s vernachlässigt².

4.1.2 Bestimmung der elektrischen Feldkonstanten

Der Stromintegrator zeigt unangeschlossen eine Ladung Q_N von 0,051 in [1]. Daher nehmen wir diesen Wert als Nullabgleich für den Stromintegrator. Mit

$$Q = \kappa \cdot (Q' - Q_N), \quad (4.1.1)$$

also Multiplikation mit der Eichkonstanten, erhalten wir die tatsächlich eingeflossene Ladung Q . Da κ auch fehlerbehaftet ist, folgt für den Fehler von Q

$$\sigma_Q = \sqrt{(\sigma_{Q'}^2 + \sigma_{Q_N}^2) \kappa^2 + \sigma_\kappa^2 (Q' - Q_N)^2} \quad (4.1.2)$$

nach Gleichung 6.2.5.

Die gem. Kapaizität des Kondensators erhalten wir durch die bekannte Formel

²Bereits beim Versuch ist hier aufgefallen, dass immer wieder offensichtlich falsche Werte angezeigt wurden, und nachdem der nun berechnete Wert etwa um die Größenordnung 10^2 größer ist als die anderen, muss hier ein Fehler vorliegen

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (4.1.3)$$

wobei U die Spannung ist, mit der der Kondensator aufgeladen wurde, und 220 V beträgt. Mit Gleichung 6.2.5 ist der Fehler für C

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\sigma_Q}{U}\right)^2 + \sigma_U^2 \left(\frac{Q}{U^2}\right)^2}. \quad (4.1.4)$$

Nun können wir aus Gleichung 2.3.12 G berechnen, also der Theoriewert der Kapazität ohne ϵ_0 . Zwischen den Kondensatorplatten befindet sich Luft. Dafür ist die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 1$. Dann ist

$$G = (n - 1) \left\{ \frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \left[\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (4.1.5)$$

Wir erhalten damit

$$\epsilon_0 = \frac{C}{G} \quad (4.1.6)$$

mit einem Fehler nach Gleichung 6.2.5 von

$$\sigma_{\epsilon_0} = \sqrt{\sigma_C^2 \cdot \left(\frac{1}{G}\right)^2} = \left| \frac{\sigma_C}{G} \right| \quad (4.1.7)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt.

Messwert x in [1]	Kapazität C in nF	elektrische Feldkonstante ϵ_0 in $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
1,379	$3,9 \pm 0,5$	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-12}$
1,377	$3,9 \pm 0,5$	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-12}$
1,375	$3,9 \pm 0,5$	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-12}$
1,38	$3,9 \pm 0,5$	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-12}$
1,382	$3,9 \pm 0,5$	$(8,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-12}$

Tabelle 2: Errechnete Werte für Kapazität C und elektrische Feldkonstante ϵ_0 bestimmt über die Entladungsladung des Kondensators

Durch die gerundeten Werte auf signifikante Stellen durch die Fehler scheint es so, als wenn alle Werte gleich wären, obwohl sich diese unterscheiden. Daher bleibt es sinnvoll, mit den ungerundeten Werten aus dem Kalkulationsprogramm einen gewichteten Mittelwert zu berechnen.

Dieser ergibt sich zu

$$\epsilon_0 = (8,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Die theoretische Kapazität des Kondensators ist mit den am Platz gegebenen Werten nach Gleichung 2.3.12 mit einer Literaturangabe zu ϵ_0 :

$$C_n \approx 3,896 \cdot 10^{-9} \text{ F.}$$

4.2 Berechnungen durch den RC-Schwingkreis

Zur Erklärung der Spannungsverläufe im Entladevorgang soll die nachstehende Abbildung dienen.

In Abbildung 4 sind zwei Funktion dargestellt, die beide die gemessene Spannung während der Entladung eines Kondensators mit der Kapazität C in verschiedenen Schaltungen abbilden.

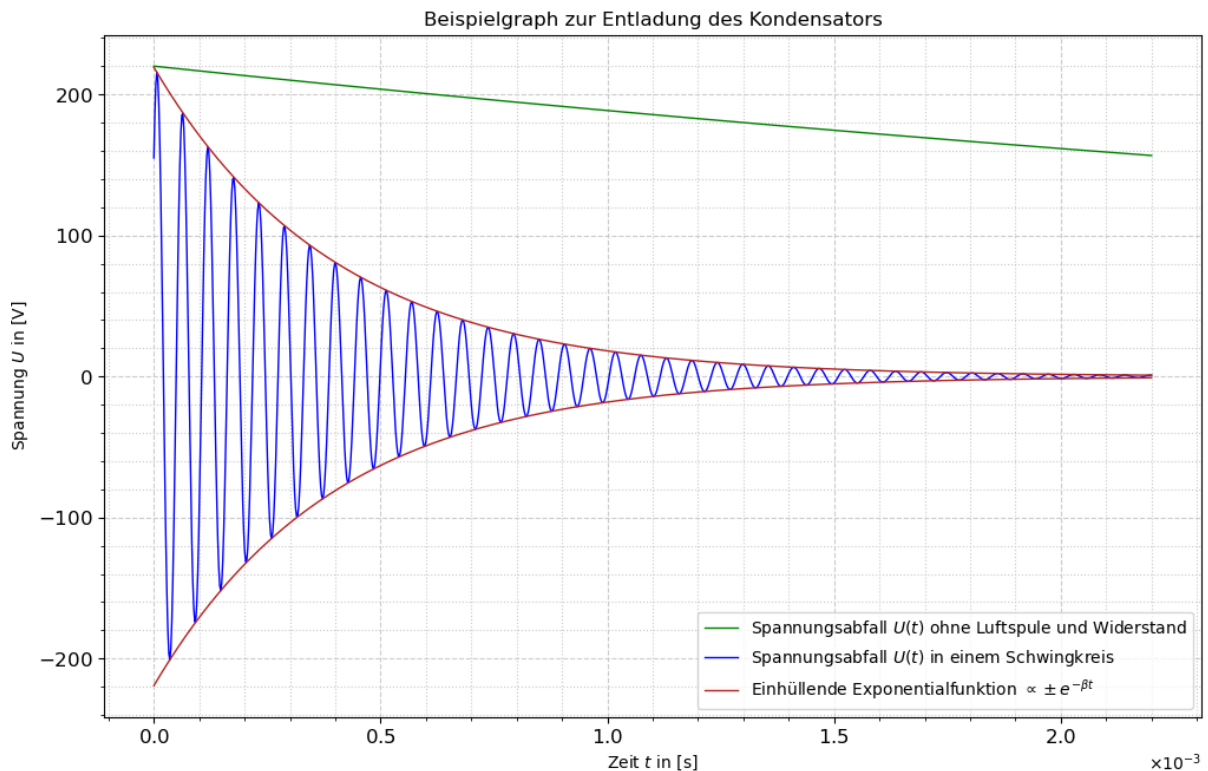


Abbildung 4: Theoriekurven für die während der Kondensatorentladung messbaren Spannung $U(t)$ für verschiedene Schaltungen, die jeweils keinen zusätzlichen Widerstand neben dem Spulenwiderstand und dem Eingangswiderstand R_{Osz} besitzen

Die einhüllende Exponentialfunktion lautet eigentlich

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{-\beta t}. \quad (4.2.1)$$

Die verwendeten Werte für die Funktionen sind unterhalb dargestellt.

$$\begin{aligned}
U_0 &= 220 \text{ V} \\
C &= 4 \cdot 10^{-9} \\
R_{\text{Oszi}} &= 1620000 \Omega \\
L &= 0.01997 \text{ H} \\
R_L &= 99.5 \Omega \\
\beta &= \frac{R_L}{2L} \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
a &= 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ V} \\
b &= a
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Nun werden die geplotteten Funktionen erklärt.

U_{LC} aus Gleichung 4.2.3 gibt die Schwingung in der Schaltung an. Da eine Spule installiert ist, ergibt diese Schaltung einen echten Schwingkreis. Die Linearfaktoren a , b sind so gewählt, dass $U_{\text{LC}}(t = 0 \text{ s}) \approx U(t = 0 \text{ s})$ gilt. Die Gleichung ist die Lösung einer gedämpften harmonischen Schwingung, wofür die Eigenschwingung größer als die Dämpfung ist, sodass sich der Schwingfall einstellt, geteilt durch die Kapazität, da die DGL für die Funktion $Q(t)$ gilt.

$$U_{\text{LC}}(t) = \frac{e^{-\beta t}}{C} (a \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t) + b \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t)) \tag{4.2.3}$$

Gleichung 4.2.4 ist die Lösung der Entladung abh. von der Zeit aus Gleichung 2.1.2 für eine Schaltung, die neben dem Kondensator, Impulsgenerator und Oszilloskop kein weiteres Bauteil besitzt:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R_{\text{Oszi}} C} \cdot t} \tag{4.2.4}$$

An diesen Theoriekurven kann man gut erkennen, dass sich der Kondensator im Fall ohne Spule in einem exponentiellen Abfall entlädt. Dabei erinnert der kleine Ausschnitt aus Abbildung 4 an den Kriechfall des POHLschen Resonators. Der Kondensator entlädt sich durch einen möglichen Widerstand R_x oder R_2 deutlich langsamer als durch eine Spule. Der Kondensator ist praktisch noch nicht vollständig entladen, bis der nächste Spannungsimpuls, zu sehen in Abbildung 8 bis Abbildung 11, gegeben wird.

Im Schwingkreis hingegen, in Abbildung 4 blau markiert, induziert der Strom, der vom Kondensator kommt und durch die Spule fließt, in der Spule eine Spannung, die wegen der LENZschen Regel der Entladungsspannung des Kondensators entgegengerichtet ist, sodass sich die Richtung der Spannung periodisch umkehrt, was gut in Abbildung 4 an den x-Achsen-Durchgängen zu sehen ist. Die Entladung im echten Schwingkreis geht deutlich schneller vonstatten.

4.2.1 Bestimmung des unbekannte Widerstandes und des Isolationswiderstandes

Der Widerstand wird bestimmt durch Gleichung 2.1.3, dabei wurde jeweils der Unterschied einer Messung zur direkt benachbarten Messung betrachtet und anschließend der gewichtete Mittelwert gebildet.

Aus der ersten Messreihe mit dem Plattenkondensator parallel geschaltet zum unbekanntem Widerstand R_x ergibt die für $R_{ges} = (2,3 \pm 0,3) \cdot 10^9 \Omega$. Aus der zweiten Messreihe nur mit dem Plattenkondensator ist der Isolationswiderstand $R_{iso} = (174,3 \pm 0,7) \cdot 10^9 \Omega$. Nun kann R_x aus der Gleichung für parallel geschaltete Widerstände bestimmt werden

$$R_x = \frac{1}{\frac{1}{R_{ges}} - \frac{1}{R_{iso}}} = (2,3 \pm 0,3) \cdot 10^9 \Omega. \quad (4.2.5)$$

Der Fehler von R_x wurde dabei nach Gleichung 6.2.5 bestimmt, mit

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\sigma_{R_{ges}}^2 \left(\frac{R_{iso}^2}{(R_{ges} - R_{iso})^2} \right)^2 + \sigma_{R_{iso}}^2 \left(\frac{R_{ges}^2}{(R_{iso} - R_{ges})^2} \right)^2} \quad (4.2.6)$$

4.2.2 Bestimmung der Kapazität des Kondensators und des Eingangswiderstand des Oszilloskops

Als nächstes soll der Eingangswiderstand des Oszillators und seine Kapazität bestimmt werden. Dazu nutzen wir die Überlegungen aus Unterabschnitt 2.2 aus.

Für die experimentelle Bestimmung von a und b nutzen wir Abbildung 8 bis Abbildung 12. Diese sind invertiert ausgegeben (also an der x-Achse gespiegelt), da vermutlich diese Einstellung am Oszilloskop verwendet wurde. Die ausgelesenen Datenpunkte lassen sich aber wieder zurückformen, indem man die y-Koordinaten mit -1 multipliziert und den betragsmäßig größten Wert addiert, sodass alle Werte > 0 werden, damit man den natürlichen Logarithmus anwenden kann.

Die Funktion der Ladung Q während der Entladung der Schaltung ist durch die Lösung der DGL in Gleichung 2.1.2 festgelegt. Auf beiden Seiten durch die Kapazität zu teilen ergibt

$$\frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \exp\left(-\frac{1}{RC} \cdot t\right) \quad (4.2.7)$$

$$\Leftrightarrow U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} \cdot t\right) \quad |\ln(\cdot) \quad (4.2.8)$$

$$\Leftrightarrow \ln(U(t)) = \ln(U_0) - \frac{1}{RC} \cdot t \quad (4.2.9)$$

Das ist die Geradengleichung. Es soll

$$\frac{a}{b} = \frac{R_{\text{Oszi}}}{R_g} \quad (4.2.10)$$

gelten (vgl. Gleichung 2.2.3). Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{Oszi}}}{R_g} &= \frac{R_{\text{Oszi}} \cdot C}{R_g \cdot C} \\ &= R_{\text{Oszi}} \cdot \frac{1}{R_g \cdot C} \\ &= \frac{\frac{1}{R_g \cdot C}}{\frac{1}{R_{\text{Oszi}} \cdot C}}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Mit Gleichung 4.2.9 indentifizieren wir a als die Geradengleichung für die Entladung aus dem „Schwingkreis“ mit dem $2\text{M}\Omega$ -Widerstand aus Abbildung 10 und b als die Geradengleichung aus dem Schwingkreis für die Entladung nur mit den Plattenkondensator aus Abbildung 9.

Der Fehler der y-Werte, welche gegen die Zeit aufgetragen werden, mit $y = \ln(U)$ ergibt sich nach Gleichung 6.2.5 zu

$$\sigma_y = \frac{\sigma_U}{U}. \quad (4.2.12)$$

Für die Zeit nehmen wir einen Fehler durch die halbe Skalenbreite von $\sigma_t = 0,0005$ s an.

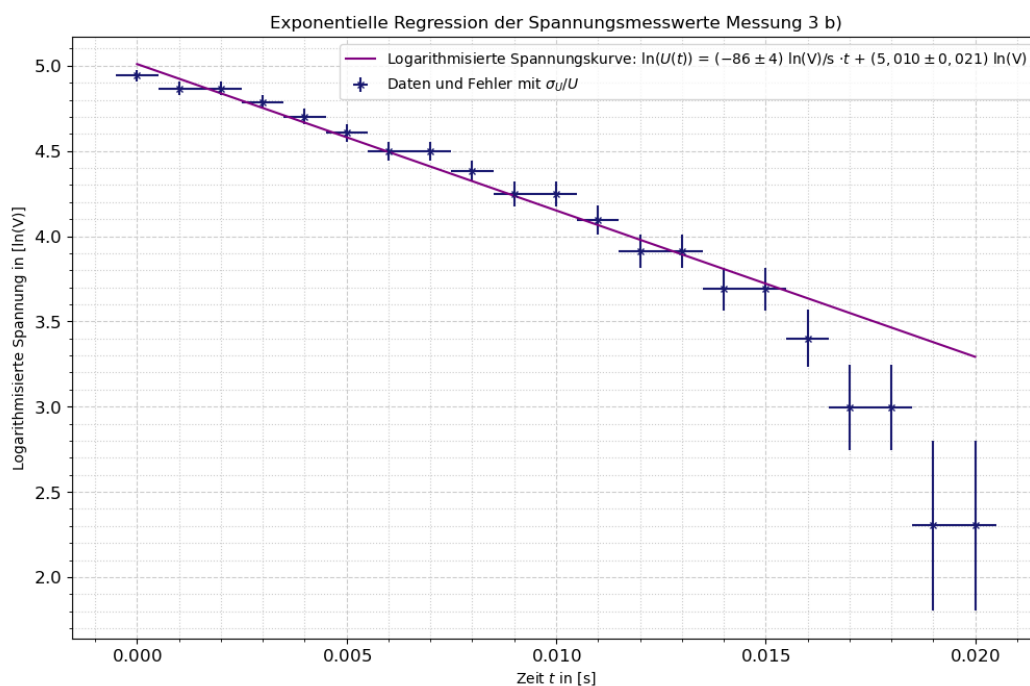


Abbildung 5: Logarithmierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit `scipy.optimize`. Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist nur S1 geschlossen

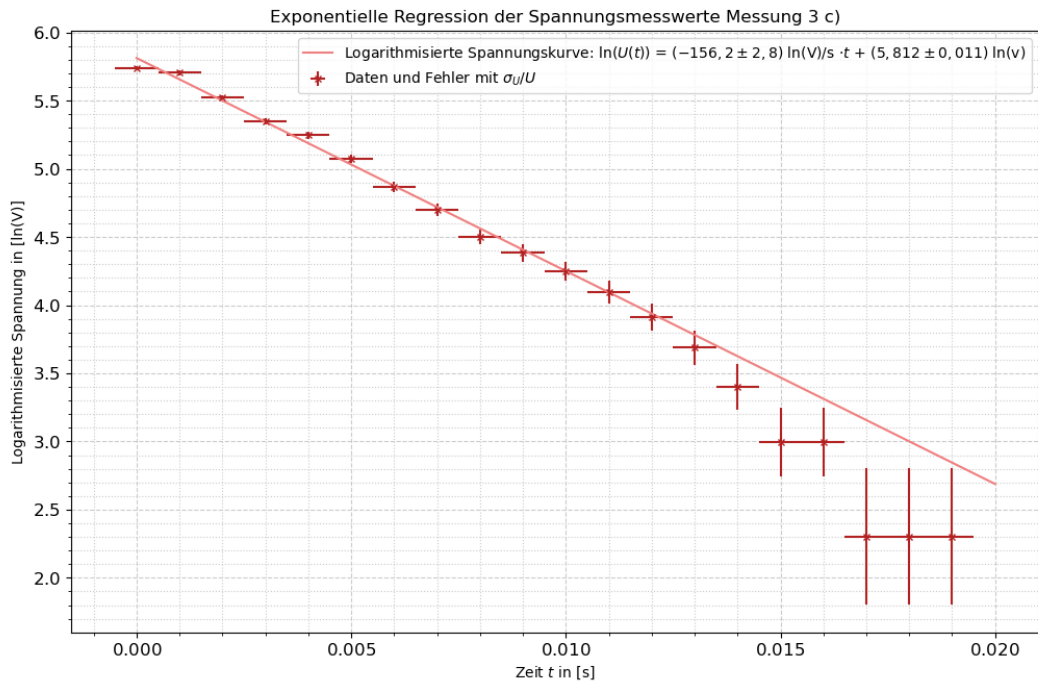


Abbildung 6: Logarithmierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit `scipy.optimize`. Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist S1 und S2 geschlossen, wobei statt des unbekanntes Widerstands R_x der bekannte Widerstand R_2 mit $2\text{ M}\Omega$ eingesetzt ist

Die Ergebnisse sind in Abbildung 5 und Abbildung 6 dargestellt. Dann erhalten wir

$$b = (86 \pm 4) \frac{\ln(V)}{s}$$

$$a = (156,2 \pm 2,8) \frac{\ln(V)}{s}.$$

Für den Eingangswiderstand des Oszilloskops R_{Oszi} nach Gleichung 2.2.3 und einem Fehler nach Gleichung 6.2.5 von

$$\sigma_{R_{\text{Oszi}}} = \sqrt{\sigma_a^2 \left(\frac{R_2}{b}\right)^2 + \sigma_b^2 \left(\frac{R_2 \cdot a}{b^2}\right)} \quad (4.2.13)$$

ergibt sich dann

$$R_{\text{Oszi}} = (1,63 \pm 0,19) \cdot 10^6 \Omega.$$

Gleichung 2.2.1 können wir nun nach C umstellen, sodass

$$C = \frac{a}{R_{\text{Oszi}}} \quad (4.2.14)$$

gilt. Durch Gleichung 4.2.9 hat a die Einheit $[\frac{1}{\Omega\text{F}}]$. Nach Gleichung 6.2.5 hat C den Fehler

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_a^2 \left(\frac{1}{R_{\text{Oszi}}}\right)^2 + \sigma_{R_{\text{Oszi}}}^2 \left(\frac{a}{R_{\text{Oszi}}^2}\right)^2}. \quad (4.2.15)$$

Das Ergebnis ist

$$\underline{\underline{C = (9,6 \pm 1,1) \cdot 10^{-5} \text{ F}}}$$

4.2.3 Bestimmung des unbekanntes Widerstands

Zur Bestimmung des unbekanntes Widerstands R_x kann man ähnlich vorgehen. Wir betrachten wieder Gleichung 2.2.3. Dieses Mal ersetzen wir R_2 durch R_x , der in Messung 3 d) installiert war. Dann folgt

$$R_{\text{Oszi}} = \left(\frac{\gamma}{b} - 1\right) R_x \quad (4.2.16)$$

$$\Leftrightarrow R_x = \frac{R_{\text{Oszi}}}{\frac{\gamma}{b} - 1} \quad (4.2.17)$$

Mit Gleichung 4.2.9 und dem Fehler nach Gleichung 4.2.12, wobei der x-Fehler $\sigma_t = 0,0005 \text{ s}$ ist, erhalten wir die Geradensteigung γ aus Abbildung 7, mit welcher wir den unbekanntes Widerstand berechnen können.

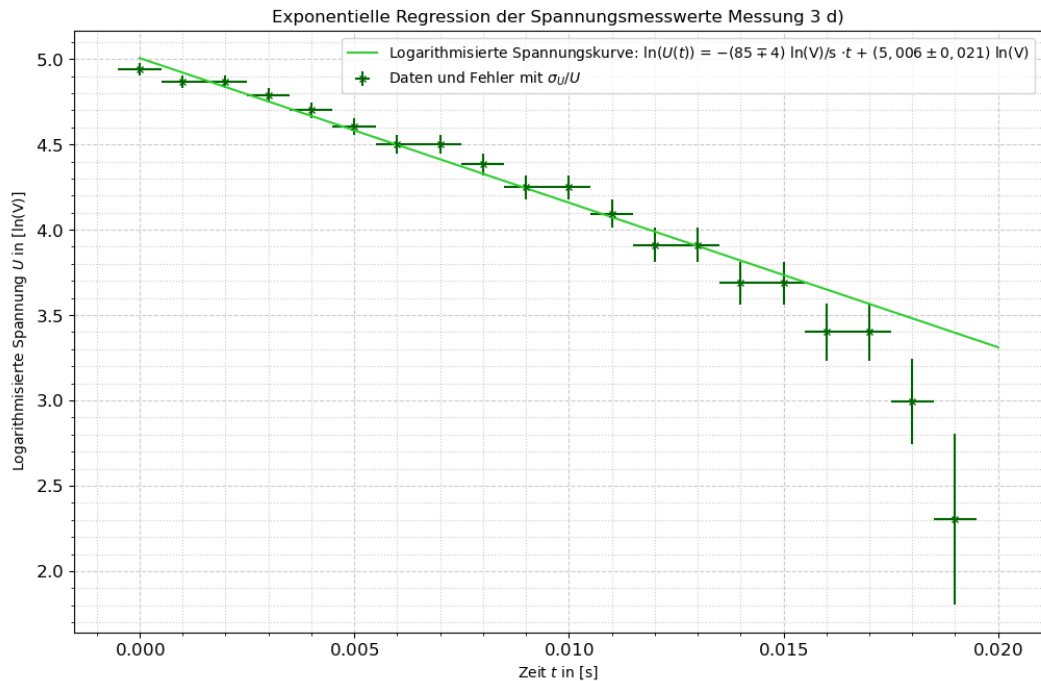


Abbildung 7: Logarithmisierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit `scipy.optimize`. Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist S1 und S2 geschlossen, wobei der unbekannte Widerstand R_x installiert ist

Diese beträgt

$$\gamma = (85 \pm 4) \frac{\ln(V)}{s}.$$

Durch die Gleichung 4.2.17 ergibt sich nach Gleichung 6.2.5 ein Fehler von

$$\sigma_{R_x} = \left(\frac{\gamma}{b} - 1\right)^{-2} \cdot \sqrt{\sigma_{R_{Oszi}}^2 \left(\frac{\gamma}{b} - 1\right)^2 + \sigma_{\gamma}^2 \left(\frac{R_{Oszi}}{b}\right)^2 + \sigma_b^2 \left(\frac{R_{Oszi} \cdot \gamma}{b^2}\right)^2} \quad (4.2.18)$$

und somit

$$R_x = (1,4 \pm 8) \cdot 10^8 \Omega.$$

4.3 Berechnungen durch den RLC-Schwingkreis

Aus der Schwingkreis-Messung mit Kondensator und Spule kann nun L bestimmt werden durch Gleichung 2.3.11. Dabei wurde aus dem Plot des Oszilloskops die Periodendauer abgelesen. Durch Messen mehrerer Periodendauern und anschließender Bildung des Mittelwerts ergibt sich $T = (5,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-5}$ s, C wurde aus Tabelle 2 verwendet und Λ wird bestimmt durch den natürlichen Logarithmus des Quotienten zweier aufeinander folgender Maxima und ist $\Lambda = 0,17 \pm 0,06$.

Damit ist schließlich

$$L = (0,019 \pm 0,003) \text{ H}, \quad (4.3.1)$$

wobei der Fehler nach Gleichung 6.2.5 berechnet wurde durch

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_C^2 \left(\frac{T^2}{C^2(4\pi^2 + \Lambda^2)} \right)^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{T}{C(4\pi^2 + \Lambda^2)} \right)^2 + \sigma_\Lambda^2 \left(\frac{T^2 2\Lambda}{C(4\pi^2 + \Lambda^2)} \right)^2}. \quad (4.3.2)$$

Es kann nun auch der Widerstand der Spule R_L bestimmt werden, durch Gleichung 2.3.2:

$$R_L = 120 \pm 50 \Omega. \quad (4.3.3)$$

4.4 Theoretische Werte und Vergleiche

Aus Gleichung 4.2.5 wurde R_x bestimmt als $R_x = (2,3 \pm 0,3) \cdot 10^9 \Omega$, der zweite für R_x bestimmte Wert aus Gleichung 4.2.3 ist $R_x = (1,4 \pm 8) \cdot 10^8 \Omega$.

Der mit dem Multimeter gemessene Wert des Widerstands der Luftspule ist

$R_L = (99,50 \pm 0,16) \Omega^3$, und der durch die Messungen am Schaltkreis bestimmte Wert ist $R_L = (120 \pm 50) \Omega$. Nach Tabelle 2 wurde C auf $(3,9 \pm 0,5) \text{ nF}$ berechnet, in Unterunterabschnitt 4.2.2 wurde der Wert $C = (9,6 \pm 1,1) \cdot 10^{-5} \text{ F}$ berechnet und der mit dem Multimeter gemessene Wert ist $C = (3,95 \pm 0,22) \text{ nF}^4$.

Für die Widerstände R_x , der unbekannte Widerstand, und R_C , der Widerstand des Kondensators, zeigte das Multimeter einen nicht messbaren Wert über $40 \text{ M}\Omega$ an. Diese waren also zu groß, um mit dem Multimeter gemessen zu werden.

³Dabei ist der systematische Fehler berechnet durch 0,5% vom max. Wert + 1 Skalenteil, und der Gesamtfehler ergibt sich aus Gleichung 6.2.4.

⁴Systematischer Fehler bestimmt durch 3% vom max. Wert + 10 Skalenteile und Gesamtfehler nach Gleichung 6.2.4

4.4.1 Vergleich der Induktivität der Luftspule

Die Formel zur theoretischen Bestimmung der Induktivität einer Zylinderspule ist nach [5, S. 398]:

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l} A. \quad (4.4.1)$$

Die magnetische Permeabilität von Luft beträgt $\mu_{r,L} = 1 + 3,7 \cdot 10^{-7}$, wie aus [1, S. 80] zu entnehmen ist.

Mit den gegebenen Werten am Versuchsplatz, wodurch diese als fehlerfrei angenommen werden, ergibt sich:

$$\underline{\underline{L \approx 0,01997 \text{ H.}}}$$

Dieser Wert ist nicht fehlerbehaftet.

Der experimentell bestimmte Wert aus Unterabschnitt 4.4 beträgt $L = (0,019 \pm 0,003) \text{ H}$.

Ohne Fehlerrechnung sieht man, dass diese Werte sehr nah beieinanderliegen.

5 Diskussion

Die elektrische Feldkonstante ϵ_0 sollte eigentlich nach [1, S. 69] $8,854188 \cdot 10^{-12} \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ betragen. Mit dem errechneten Wert $\epsilon_0 = (8,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ liegt dieser im $1\text{-}\sigma$ -Intervall.

$R_x = (2,3 \pm 0,3) \cdot 10^9 \Omega$ aus Unterunterabschnitt 4.2.1 liegt im $3\text{-}\sigma$ -Intervall von $R_x = (1,4 \pm 8) \cdot 10^8 \Omega$ aus Unterunterabschnitt 4.2.3, anders herum im $8\text{-}\sigma$ -Intervall. Dabei ist allerdings der Fehler sehr groß, was vermutlich der Tatsache geschuldet ist, dass in die Formel für R_x aus Gleichung 4.2.17 der Eingangswiderstand des Oszilloskops R_{Osz} eingeht. Diese Größe ist zweifelhaft, wie gleich erläutert werden soll.

Der Widerstand der Spule mit dem Multimeter gemessen beträgt $(99,5 \pm 0,16) \Omega$ und liegt damit im $1\text{-}\sigma$ -Intervall des Wertes $R_L = (120 \pm 50) \Omega$ aus Unterabschnitt 4.3, andersherum ergibt sich ein Sigma-Intervall von 129, was nicht verwunderlich ist, da das Multimeter präziser messen kann als es eine experimentelle Bestimmung zulässt, da bei letzterer sich auch andere Fehler fortpflanzen. So ergibt sich dann ein kleinerer Fehler, der zu einem kleineren Fehlerintervall führt.

Der in Tabelle 2 bestimmte Wert für die Kapazität $C = (3,9 \pm 0,5) \text{nF}$ liegt in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum mit dem Multimeter gemessenen Wert von $C = (3,95 \pm 0,22) \text{nF}$, und andersherum genauso.

Der andere berechnete Wert von $C = (9,6 \pm 1,1) \cdot 10^{-5} \text{F}$ hat ein $8\text{-}\sigma$ -Intervall zum Wert des Multimeters, und ist in einer deutlich anderen Größenordnung als die anderen beiden Werte⁵.

Es ist zu erwarten, dass der vom Multimeter gemessene Wert der genaueste ist, demnach ist der erste berechnete Wert für C erfreulich genau.

Für den zweiten Wert ist eine größere Abweichung zu erwarten, auf Grund der für die Berechnung verwendeten Daten und Ergebnisse voriger Rechnungen.

Der Wert für den Eingangswiderstand des Oszilloskops wurde mit den Geradensteigungen aus Abbildung 5 und Abbildung 6 bestimmt. In diesen Abbildungen ist zu erkennen, dass die logarithmisierte Spannung keinen wirklichen linearen Zusammenhang gibt, obwohl das nach Gleichung 2.1.2 und Gleichung 4.2.9 wie hergeleitet eigentlich der Fall sein müsste. Folglich ist die Lösung der DGL für die Entladung des Kondensators nicht hinreichend genau.

Eine sehr wahrscheinliche Erklärung dafür ist, dass der Impulsgenerator einen neuen Spannungsimpuls gibt, bevor sich der Kondensator vollständig entladen hat, worauf auch schon am Anfang in Unterabschnitt 4.2 hingewiesen wurde. Dafür spräche, dass

⁵Das σ -Intervall des Multimetermesswerts für C hat ein $436346\text{-}\sigma$ -Intervall zu diesem Wert und der andere ein $191993\text{-}\sigma$ -Intervall.

der experimentell bestimmte Wert für die Induktivität der Luftspule im $1\text{-}\sigma$ -Intervall des Theoriewerts (vgl. Unterunterabschnitt 4.4.1) liegt. Da dieser experimentell bestimmte Wert aus einem echten RLC-Schwingkreis errechnet wurde, entlädt sich der Kondensator wie in Unterabschnitt 4.2 erklärt deutlich schneller, sodass keine Restladung auf dem Kondensator verbleibt, die den Spannungsverlauf beeinflussen könnte. Die letzten etwa fünf Werte aus Abbildung 5 bis Abbildung 7 sind also von dem bereits nächsten Spannungsimpuls besonders betroffen. Dadurch, dass der Kondensator nicht unter einen bestimmten Ladungswert fällt und die Plots des Oszilloskops erst ausgegeben wurden, wenn sich im Graphen ein Gleichgewicht eingestellt hat, sind alle gefitteten Punkte in jenen Abbildungen betroffen, sodass die durch `scipy.optimize` bestimmten Geradensteigungen eine signifikante Abweichung ergeben.

Alle aus diesen Geradensteigungen bestimmte Werte in Unterabschnitt 4.2 wie die Kapazität C und R_x werden dadurch beeinflusst, sodass beispielsweise der Wert für die Kapazität in der Größenordnung 10.000 mal größer ist als der Theoriewert mit Gleichung 2.3.12.

6 Anhang

6.1 Vom Oszilloskop ausgegebene Plots zum Spannungsverlauf

Abbildung 8: Schaltung einzig mit Impulsgenerator; Messung 3 a)

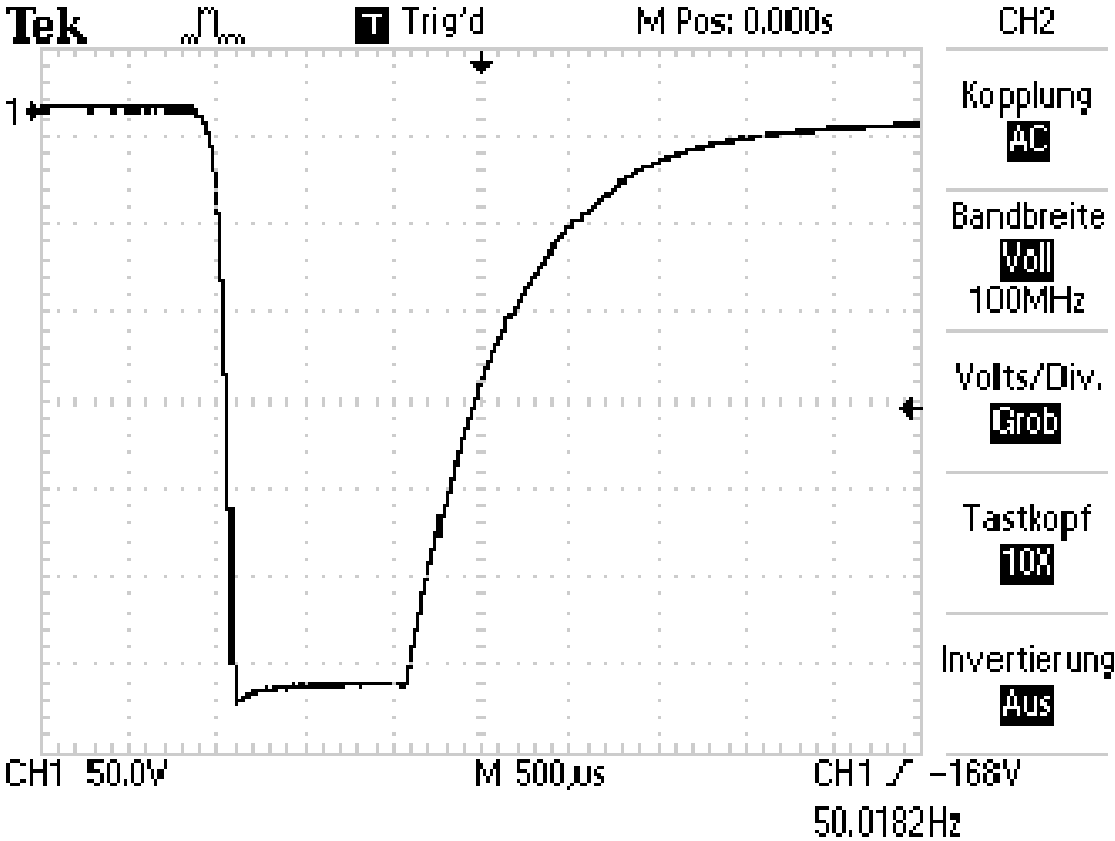


Abbildung 9: Schaltung mit Plattenkondensator; Messung 3 b)

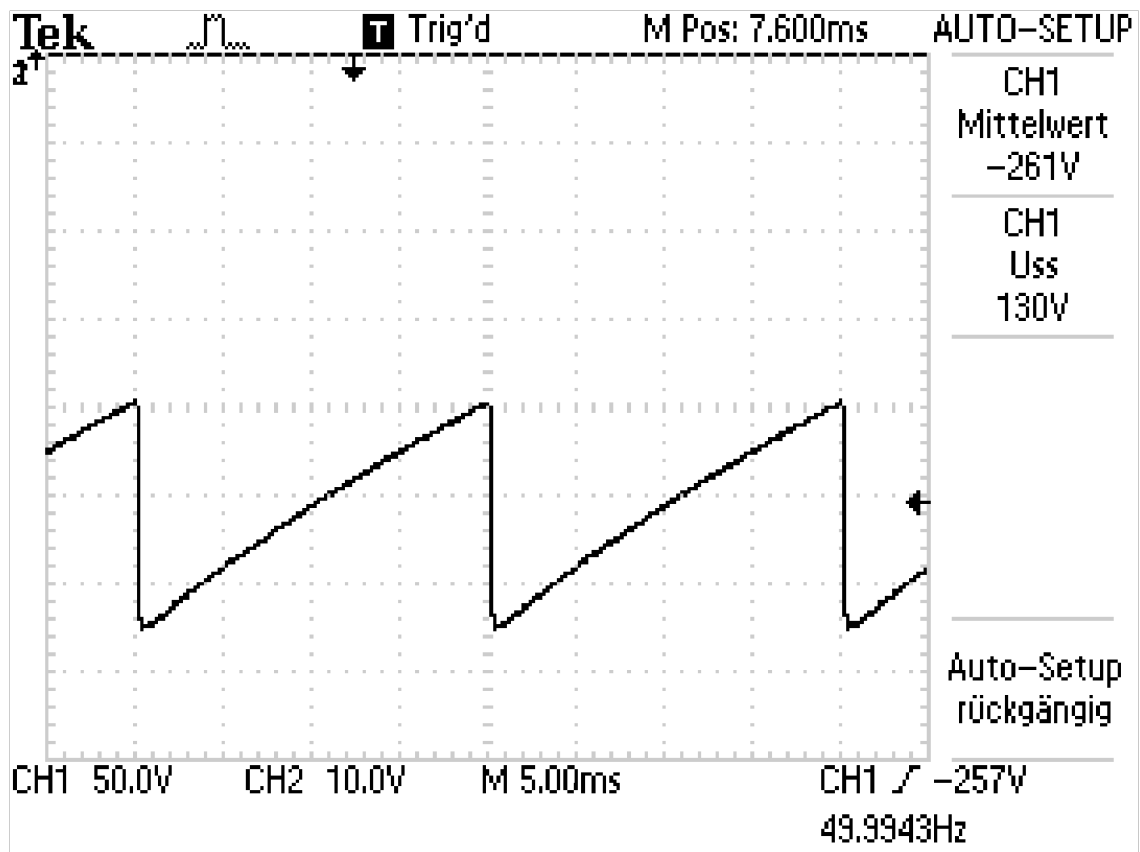


Abbildung 10: Schaltung mit Plattenkondensator und 2 MΩ Widerstand; Messung 3 c)

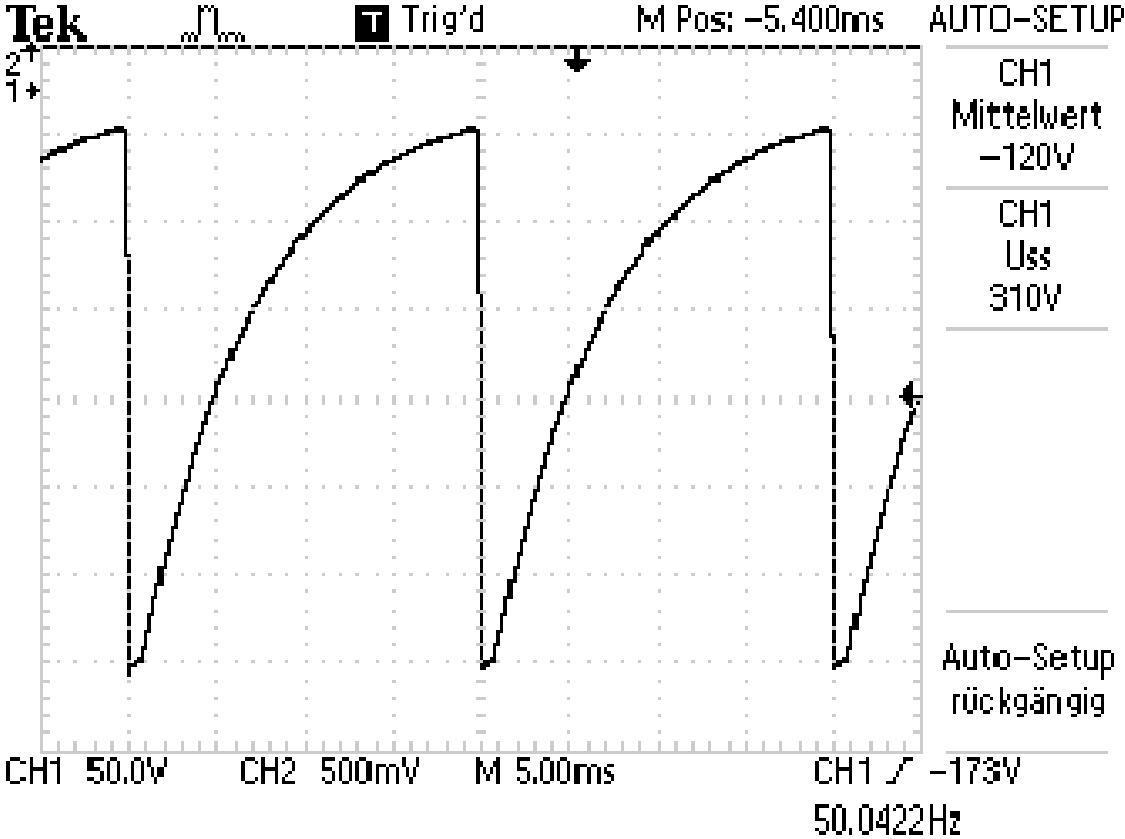


Abbildung 11: Schaltung mit Plattenkondensator und unbekanntem Widerstand R_x ; Messung 3 d)

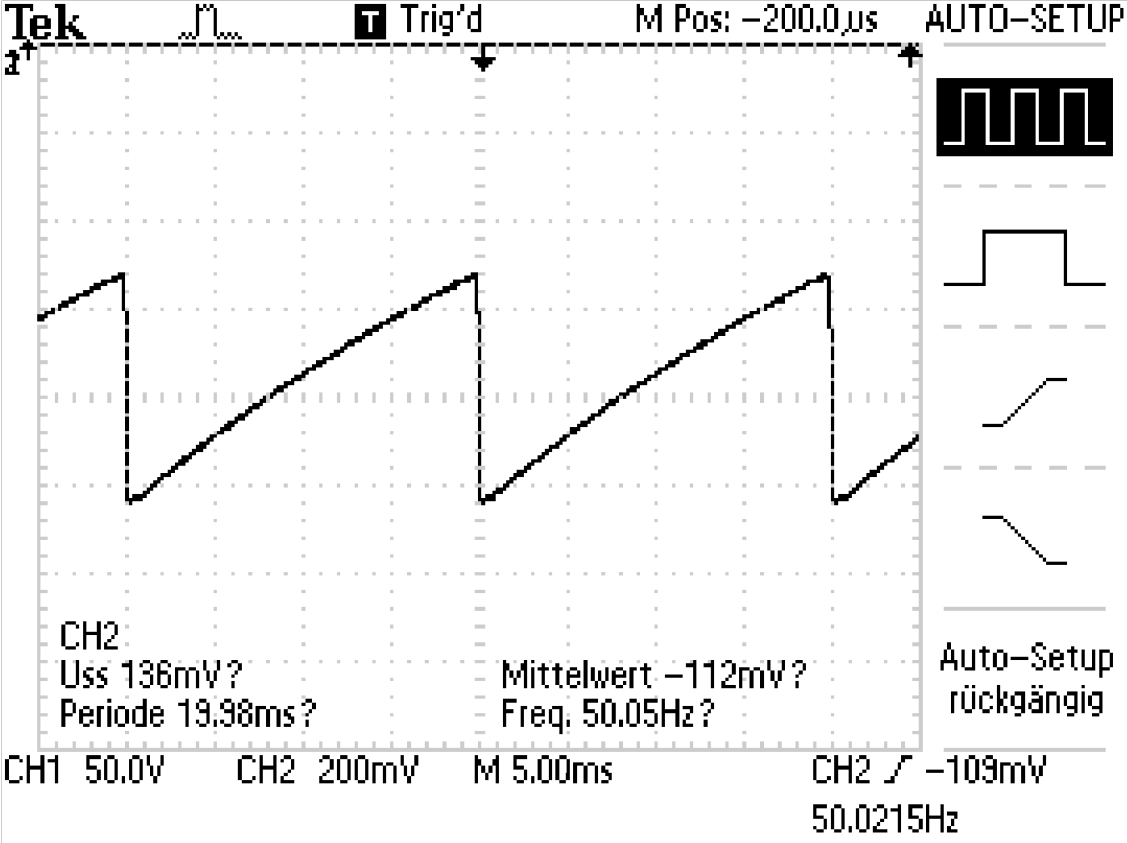
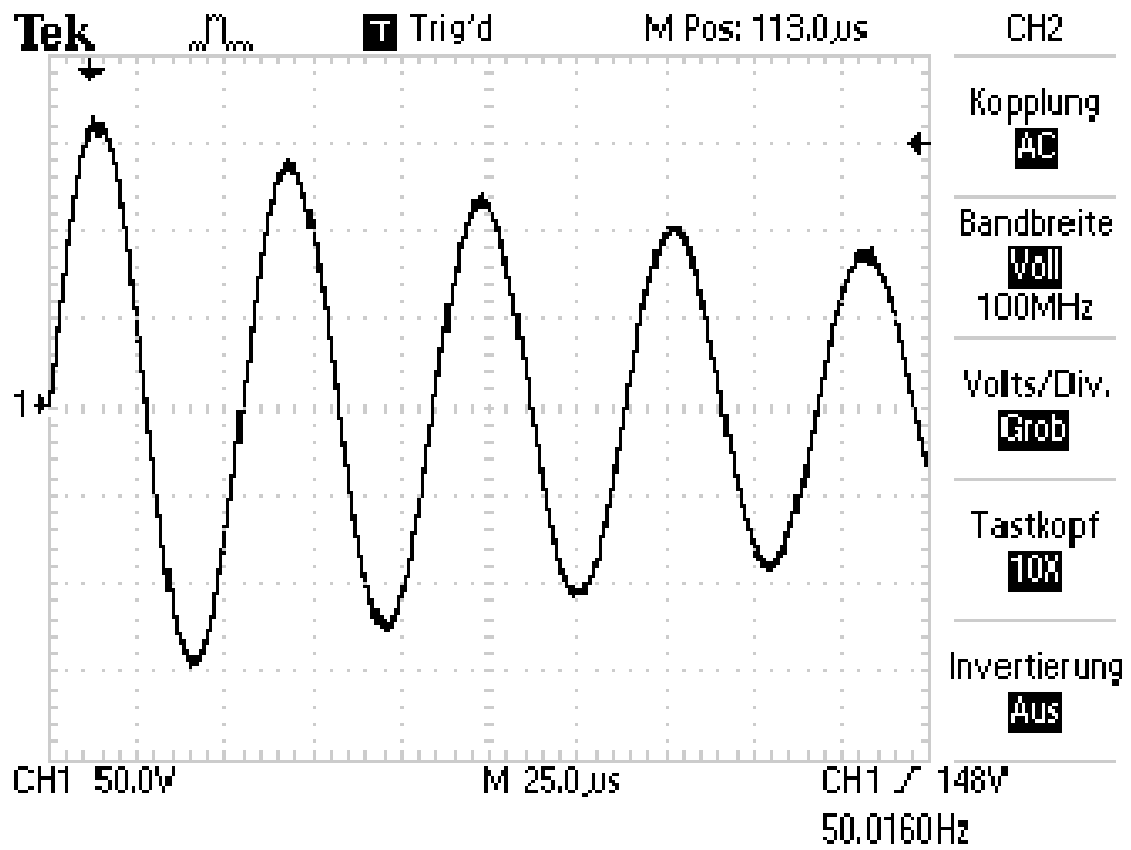


Abbildung 12: Schaltung mit Plattenkondensator und Luftspule; Messung 3 e)



6.2 Fehlerformeln

Formeln für die Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.2.1)$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.2.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.2.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.2.4)$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right)^2 + \left(\sigma_B \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right)^2} \quad (6.2.5)$$

Lineare Regression; die Steigung m und der Achsenabschnitt b den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.9)$$

Literatur

- [1] Bossek H. Becker, F. *Formelsammlung*. DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, 1. edition, 2003.
- [2] Lehrportal Uni Göttingen. Praktikum zu Experimentalphysik II: 11 - Kapillarität und Viskosität, 2020. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3638>, last access: 30.05.23.
- [3] H. Hofsäss. Wechselströme Vorlesung 14 mit Ergänzungen. Vorlesungsskript, 2023.
- [4] Gustav Robert Kirchhoff. *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*. Teubner Leipzig, 1891.
- [5] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 25. edition, 2015.
- [6] Gerhard Steiner Paul Wagner, Georg Reischl. *Einführung in die Physik*. Facultas Verlags- und Buchhandel AG, 4. edition, 2020.
- [7] Edward M. Purcell. Vieweg, 3. durchgesehene Auflage edition, 1983.

Abbildungsverzeichnis

1	Veranschaulichung der Analogie eines harmonischen Oszillators in der Mechanik zu einem RLC-Schwingkreis in der Elektrotechnik; aus [3]	3
2	Überblick aller Bestandteile des Aufbaus des Versuches bis auf Kabel; aus [2]	6
3	Schaltplan des Schwingkreises zu Durchführungspunkt 3	8
4	Theoriekurven für die während der Kondensatorentladung messbaren Spannung $U(t)$ für verschiedene Schaltungen, die jeweils keinen zusätzlichen Widerstand neben dem Spulenwiderstand und dem Eingangswiderstand R_{Oszi} besitzen	11
5	Logarithmisierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit <code>scipy.optimize</code> . Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist nur S1 geschlossen . .	15
6	Logarithmisierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit <code>scipy.optimize</code> . Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist S1 und S2 geschlossen, wobei statt des unbekanntes Widerstands R_x der bekannte Widerstand R_2 mit $2\text{ M}\Omega$ eingesetzt ist	16
7	Logarithmisierte Spannung, die im Oszilloskop angezeigt wird, aus Durchführungspunkt 3 aufgetragen gegen die Zeit mit der Geraden als best fit; bestimmt mit <code>scipy.optimize</code> . Im Schaltkreis aus Abbildung 3 ist S1 und S2 geschlossen, wobei der unbekanntes Widerstand R_x installiert ist	18
8	Schaltung einzig mit Impulsgenerator; Messung 3 a)	23
9	Schaltung mit Plattenkondensator; Messung 3 b)	24
10	Schaltung mit Plattenkondensator und $2\text{ M}\Omega$ Widerstand; Messung 3 c) .	25
11	Schaltung mit Plattenkondensator und unbekanntem Widerstand R_x ; Messung 3 d)	26
12	Schaltung mit Plattenkondensator und Luftspule; Messung 3 e)	27