

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 17
Der Transformator

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 22.06.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Idealer Transformator	5
2.2	Belasteter Transformator	6
2.2.1	Phasenverschiebung Φ	6
2.2.2	Leistungen	7
3	Durchführung	8
4	Auswertung	10
5	Diskussion	18
6	Anhang	20
6.1	Plots des Oszilloskops aus vierter Messung	20
6.2	Fehlerformeln	32
	Literatur	34

1 Einleitung

Wenn man als Kind seine Modelleisenbahn steuert, dreht man am Transformator den Drehknopf, wodurch die Eisenbahn beschleunigt. Eine damals zufriedenstellende Antwort war, dass die Elektronen nun das Signal bekommen, schneller durch die Leitung zu flitzen.

Wie wir uns aber heute denken können, sind Bauteile in Schaltungen dafür verantwortlich, die elektrotechnischen Eigenschaften in mechanische Vorgänge zu überführen, in diesem Fall der Transformator. Durch das Drehen am Knopf schiebt man eine Spule vor eine andere, wodurch sich mit zunehmendem Winkel die Zahl der Leiterschleifen in der Sekundärwindung, die der Primärwindung gegenübergestellt sind, erhöht. Auf diese Weise erhöht man mechanisch die Spannung in den Gleisen, welche die Lok abgreift, und beschleunigt diese (Abbildung 1).

Auch wenn man als Kind keine Modelleisenbahn hatte, ist man doch mit Transformatoren in Kontakt gekommen. Bei eigentlich allen technischen Geräten wie zum Beispiel einer N64 ist im Netzteil ein Transformator verbaut, der die (230 ± 23) V Spannung aus der Steckdose in eine für das Gerät verträgliche Spannung umwandelt.

Damit stellen Transformatoren einen integralen Bestandteil des Energienetzes dar und sind allgegenwärtig. Sie zu optimieren ist also in großem Interesse, um einen Transformator möglichst energieeffizient zu halten.

In diesem Versuch werden vorwiegend Phasenverschiebungen berechnet, die Rückschlüsse auf den Wirkungsgrad eines Transformators zulassen.



Abbildung 1: beispielhafter Trafo für eine analoge Eisenbahn; aus [4]

2 Theorie

Ein Transformator ist im Kern ein durchgängiges Stück Eisen, um das an zwei Stellen zwei Spulen L_1 mit der Windungszahl N_1 und L_2 mit N_2 gewickelt sind. An die erste Spule ist der Primärkreis angeschlossen, an den eine Spannung U_1 angelegt ist. An die zweite Spule ist der Sekundärstromkreis angeschlossen. Wenn dieser offen ist, handelt es sich um den unbelasteten Transformator, in dessen Sekundärkreis zwar eine Spannung U_2 induziert werden kann, ohne dass ein Strom I_2 fließt. Wenn im Primärkreis ein Strom I_1 fließt, induziert dieser einen magnetischen Fluss Φ_m im Eisenstück. Wegen der relativ großen magnetischen Permeabilität von Eisen mit etwa $\mu_r = 10.000$ laufen die allermeisten Magnetfeldlinien, die in der Primärspule induziert werden, auch durch die Sekundärspule, sodass der komplette Eisenkern von nahezu demselben Magnetfeld Φ_m durchsetzt wird.

Um außerdem Wirbelströme, welche eine Umwandlung der im Feld gespeicherten Energie in Wärme bewirken würden, entgegenzuwirken, besteht der Eisenkern aus vielen dünnen und isolierten Eisenblechen. Ein idealer Transformator hat einen Kopplungsgrad, von 1, der sich nach [1, S. 159] über

$$\kappa = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.0.1)$$

berechnet, wobei L_{12} die gegenseitige Induktion der Spulen ist, während L_1 und L_2 die Induktivitäten der einzelnen Spulen sind. In der Realität ist der Kopplungsgrad natürlich kleiner als 1, da zum Beispiel über die Wirbelströme Energie für den Stromkreis verloren geht. Bei einem idealen Transformator geht man außerdem davon aus, dass die Drähte in den Spulen keinen OHMschen Widerstand besitzen. Eine schematische Darstellung eines (unbelasteten) Transformators ist in Abbildung 2 zu sehen.

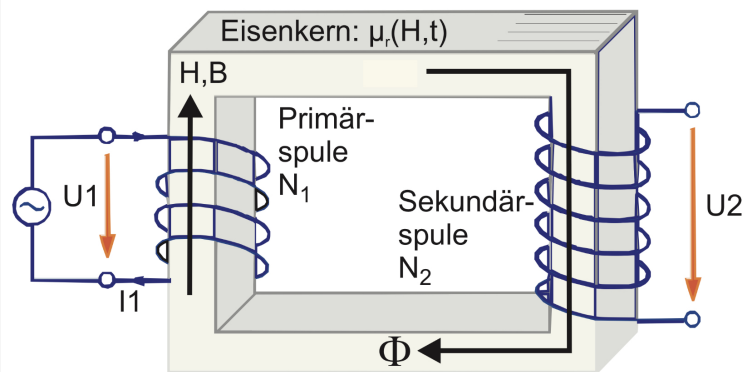


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Transformators mit höherer Windungszahl N_2 als N_1 ; der Eisenkern ist mit der Stromdichte B und der Feldstärke H durchsetzt; aus [5, S. 128]

2.1 Idealer Transformator

Die Induktionsspannung U_{ind} , die entsteht, wenn ein Leiter dem magnetischen Fluss Φ_m ausgesetzt ist, wird durch das Faradaysche Induktionsgesetz aus [1, S. 125] durch

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.1.1)$$

beschrieben. Nach dem Kirchhoffschen Gesetz muss die Summe der Spannungen im Primärkreis $U_1 + U_{\text{ind}}$ sein, sodass $-U = U_{\text{ind}}$ gilt.

Da in einer Spule N Leiterschleifen um den Eisenkern gewickelt sind, folgen für beide Spulen im Transformator die dort induzierten Spannungen

$$U_{\text{ind}, 1} = -U_1 = -N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{N_1}{U_1} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (2.1.2)$$

$$U_{\text{ind}, 2} = -U_2 = -N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{N_2}{U_2} \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (2.1.3)$$

Man darf nur in einem idealen Transformator davon ausgehen, dass der magnetische Fluss Φ_m in beiden Spulen gleich ist.

Gleichsetzen der Gleichungen führt auf

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}. \quad (2.1.4)$$

Dabei definieren wir u als das Übersetzungsverhältnis, also die Effizienz der Transformation als $u := \frac{N_1}{N_2}$. Diese Formel gilt, wenn die Spulen im entgegengesetzten Drehsinn gewickelt sind, wodurch sich U_1 und U_2 in Phase befinden. Nach der Energieerhaltung muss die in beiden Spulen gespeicherte Energie gleich sein, sodass mit $P = U I$ nach [3, S. 313] mit P als Leistung folgt:

$$W_1 \stackrel{!}{=} W_2 \quad \left| \cdot \frac{1}{t} \right. \quad (2.1.5)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{W_1}{t} = \frac{W_2}{t} \quad (2.1.6)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1 = P_2 \quad (2.1.7)$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1 I_1 = U_2 I_2 \quad \left| \cdot \frac{1}{U_1 I_2} \right. \quad (2.1.8)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{u}. \quad (2.1.9)$$

2.2 Belasteter Transformator

2.2.1 Phasenverschiebung ϕ

Wird nun der Sekundärkreis mit einem Widerstand geschlossen, ist der Transformator belastet. Das heißt, es fließt ein Strom I_2 . Dieser Strom induziert nun seinerseits wieder in L_2 einen magnetischen Fluss Φ_2 , der zu dem magnetischen Fluss Φ_1 , erzeugt durch die erste Spule, um 90° phasenverschoben ist, da auch U_2 zu Φ_1 um 90° phasenverschoben ist, während I_2 und U_2 in Phase schwingen. Die zusätzliche Komponente im Fluss sorgt dafür, dass U_1 und I_2 in der Folge nicht mehr in Phase schwingen. Diese Phasenverschiebung ϕ ergibt sich dann aus den magnetischen Flüssen zu

$$\phi = \arctan\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right), \quad (2.2.1)$$

woraus

$$\tan(\phi) = \frac{I_{1,T} \sin(\phi_0)}{I_{1,R} + I_{1,T} \cos(\phi_0)} \quad (2.2.2)$$

folgt, was Abbildung 3 zu entnehmen ist. $I_{1,T}$ und ϕ_0 bezeichnen dabei Strom und Phasenverschiebung bei unbelastetem Transformator.

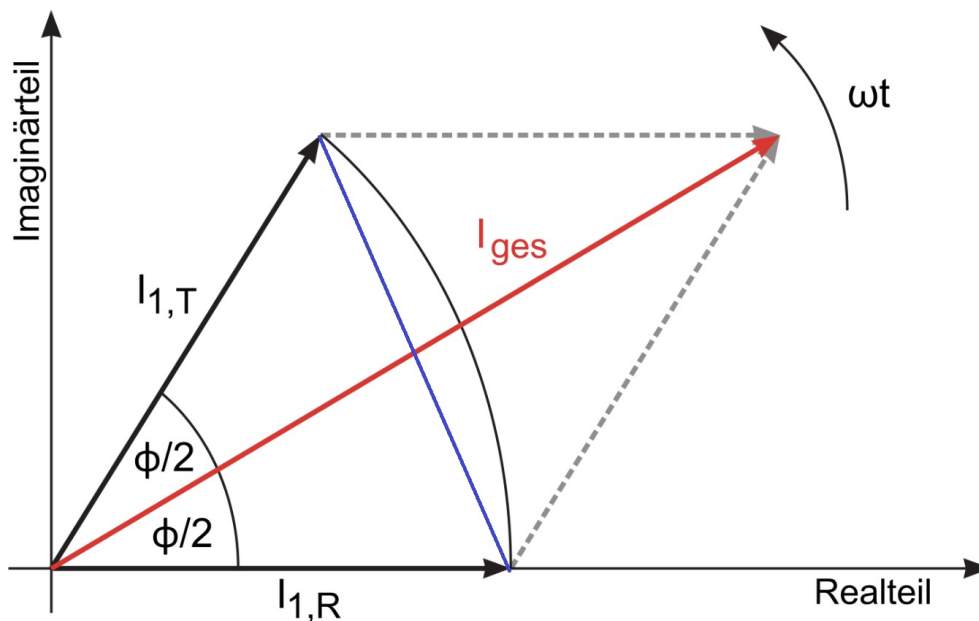


Abbildung 3: Zeigerdiagramm nach [5], verändert durch Autor

2.2.2 Leistungen

Bei bekannter Phasenverschiebung ϕ kann man nach [2, S. 416 f.] die Wirkleistung P_W und die Verlustleistung P_V des Transformators berechnen. Die Formeln dazu sind

$$P_W = UI \cos(\phi), \quad (2.2.3)$$

$$P_V = UI \sin(\phi). \quad (2.2.4)$$

Dabei ist die Wirkleistung die tatsächliche fließende Energie pro Zeit, welche die Primärspule der Spannungsquelle entnimmt. Die Verlustleistung oder auch Blindleistung ist keine Leistung, die tatsächlich vom Trafo umgesetzt wird, da dieser die Leistung, die er in 0,01 s aufnimmt, in den nächsten 0,01 s zurückgibt. Die Gründe dafür sind ein Wirkstrom, der eine Wirkleistung verursacht, und ein Blindstrom, der keine tatsächliche physikalische Leistung auf Dauer verursacht. Der Gesamtstrom I_1 vor dem Transformator setzt sich aus Wirkstrom und Blindstrom zusammen.

3 Durchführung

Bei diesem Versuch werden **starke Ströme** verwendet. Zum Schutz der benutzten Geräte ist darauf zu achten immer **erst die Spannung herunter zu drehen**, bevor etwas an den Schaltkreisen verändert wird. Dazu zählt nicht nur umstecken der Schaltung, sondern auch das umlegen von Schaltern und den Wechsel des Messbereichs des Ampèremeters.

In Abbildung 4 sieht man den Versuchsaufbau, sowie die benötigten Materialien: ein Transformator, eine Wechselspannungsquelle, ein Oszilloskop, zwei Schiebewiderstände, drei Schalter, vier Multimeter und eine Stromzange.

Der genaue Schaltkreis ist in Abbildung 6 dargestellt. Dabei ist beim Transformator zu beachten, dass die Anschlüsse a_2 mit b_1 , und c_2 mit d_1 verbunden werden. Für die Primärspule werden dann a_1 und b_2 verwendet, und c_1 mit d_2 sind die

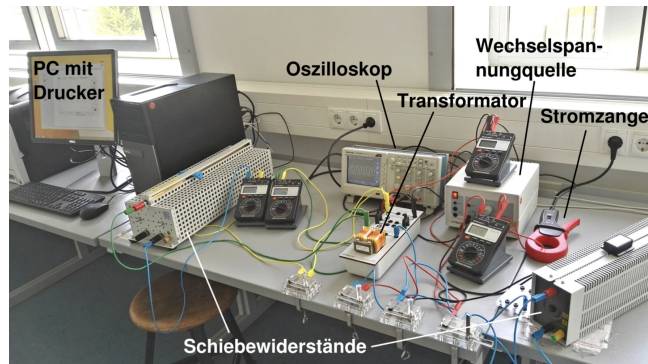


Abbildung 4: Versuchsaufbau, mit allen benötigten Geräten

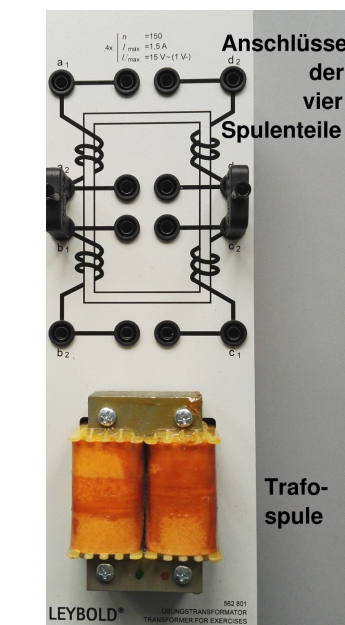


Abbildung 5: Transformator Anschlüsse

Anschlüsse der Sekundärspule, zu sehen in der folgenden zu messenden Daten korrespondieren zu dem Schaltkreis der jeweiligen Spule, in dem der Wert gemessen werden soll (also I_1 ist die Stromstärke im Schaltkreis der Primärspule).

Zu erst werden Werte mit unbelastetem Transformator gemessen, also sind in Abbildung 6 die Schalter S_2 , S_3 und S_4 geöffnet, aber S_1 geschlossen. Es ist dann I_1 und U_2 in Abhängigkeit von U_1 bestimmt. Dafür sollten 15 Messwerte genommen werden, wobei die Variation von U_1 mit der Wechselspannungsquelle geregelt wird. Es sind Messwerte für U_1 bis zu 15 V zu nehmen.

Nur für diesen Teil der Durchführung wird nun die Verbindung zwischen d_1 und C_2 unterbrochen und für die Sekundärspule werden die Anschlüsse c_1 und c_2 benutzt. Es wird wieder für die selben 15 Werte von zuvor U_2 in Abhängigkeit von U_1 gemessen. Danach wird die Verbindung zwischen d_1 und c_2 wieder hergestellt.

Nun wird der belastete Transformator betrachtet. Dafür wird zunächst nur S_1 und S_4 geschlossen. Die Spannung U_1 ist auf 15 V zu stellen, und I_2 soll mit Hilfe des Schiebewiderstands auf einen Wert zwischen 0 A und 1,5 A zu regeln. Man notiere I_1 . Anschließend wird S_2 und S_3 geschlossen und S_1 geöffnet. Durch den Schiebewiderstand R_1 wird nun die Stromstärke auf den notierten Wert I_1 gebracht.

Dann wird der Gesamtstrom bestimmt, indem der Transformator und der Schiebewiderstand parallel geschaltet werden. Dafür müssen alle Schalter außer S_3 geschlossen sein. Die Stromstärke wird nun am Ampèremeter im Primärkreis angezeigt. Diese Reihe an Messungen wird anschließend für vier weitere Stromstärken I_2 wiederholt und zuletzt für $I_2 = 0$ gemacht. Dafür sind S_3 und S_4 geöffnet.

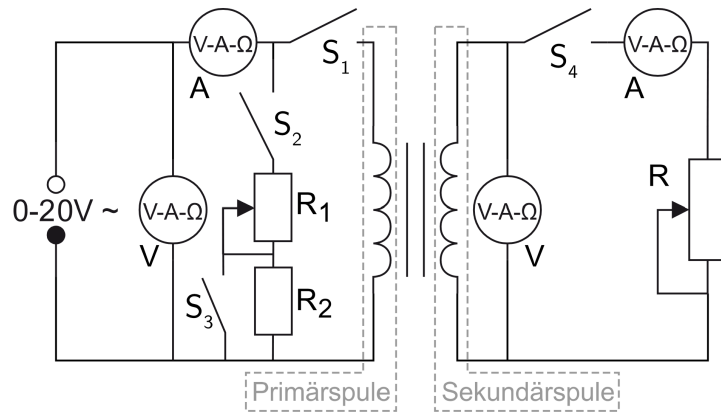


Abbildung 6: Schaltkreis des Versuchsaufbaus, mit

Schließlich wird der belastete Transformator ohne den Widerstand durch das Oszilloskop vermessen. Dafür wird der Primärstrom mit der Stromzange am Eingang 2 angeschlossen. Alle folgenden Messungen werden für die gleichen sechs Werte von I_2 gemacht, also auch $I_2 = 0$ A.

Im x-t-Mode des Oszilloskops wurde die Phasenverschiebung aus dem Zeitunterschied beider Signale gemessen.

Im x-y-Mode sind die Änderungen der Kurve bei Veränderung der Last zu betrachten. Von beiden Messungen werden die Bilder des Oszilloskops ausgedruckt, und beim zweiten muss dafür das Oszilloskop Nachleuchten auf unendlich" gestellt werden.

4 Auswertung

In Abbildung 7 wurde die Spannung vom Primärkreis U_1 als Funktion der Stromstärke des Primärkreises I_1 aufgetragen. Mit Pythons Optimize Funktion wurde eine Gerade durch diese Messpunkte gelegt. Es ist zu sehen, das diese immer innerhalb der Fehler der Messpunkte liegt. Man erkennt auch, das die Punkte keine perfekte Gerade bilden, wie man es von einem perfekten Transformator erwarten würde. Im Bereich niedriger Stromstärken ist der Anstieg der Messpunkte leicht schneller, als der der Geraden, Bei höheren Stromstärken beobachtet man das entgegengesetzte Phänomen.

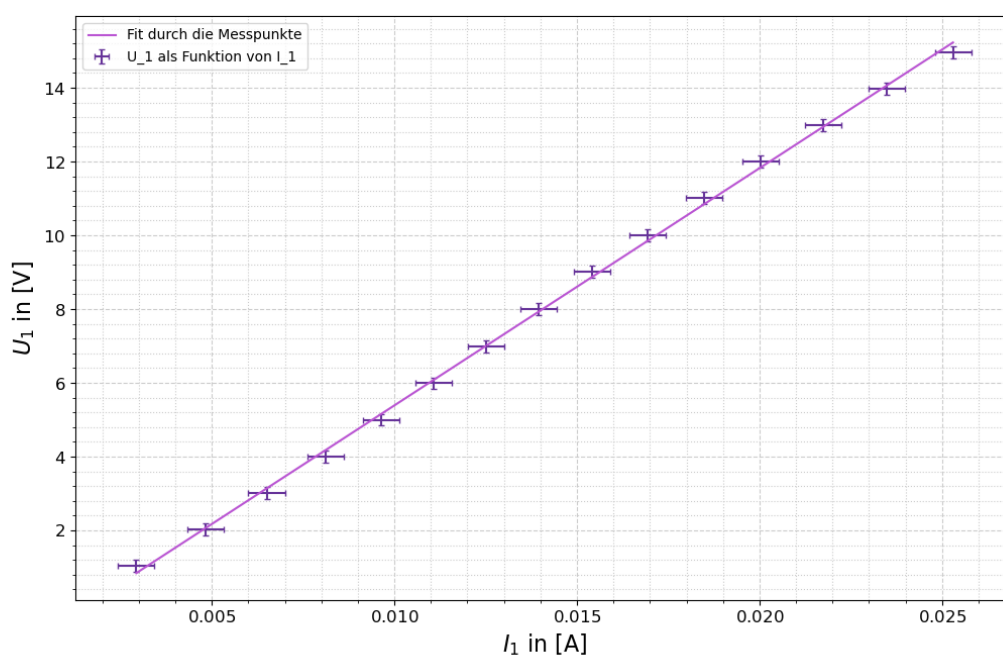


Abbildung 7: U_1 aufgetragen gegen I_1 vom unbelasteten Transformator, mit Ausgleichsgrade durch Python Optimize

Im Folgenden sollen zwei Übersetzungsverhältnis für zwei verschiedene Transformatoren bestimmt werden. Die Spannung im Sekundärkreis U_2 hängt von der Primärspannung U_1 ab, weswegen U_2 gegen U_1 aufgetragen wird. Beide Spannungen wurden mit zwei baugleichen Multimetern gemessen, wofür der Fehler

$$\sigma_U = 0,01 \cdot \text{Größter Wert} + 3 \text{ kleinste Skalenteile} \quad (4.0.1)$$

beträgt. Wir werden sehen, dass die Geradensteigung der Fitfunktionen hilfreich ist. Die Fits sind in Abbildung 8 ausgeführt.

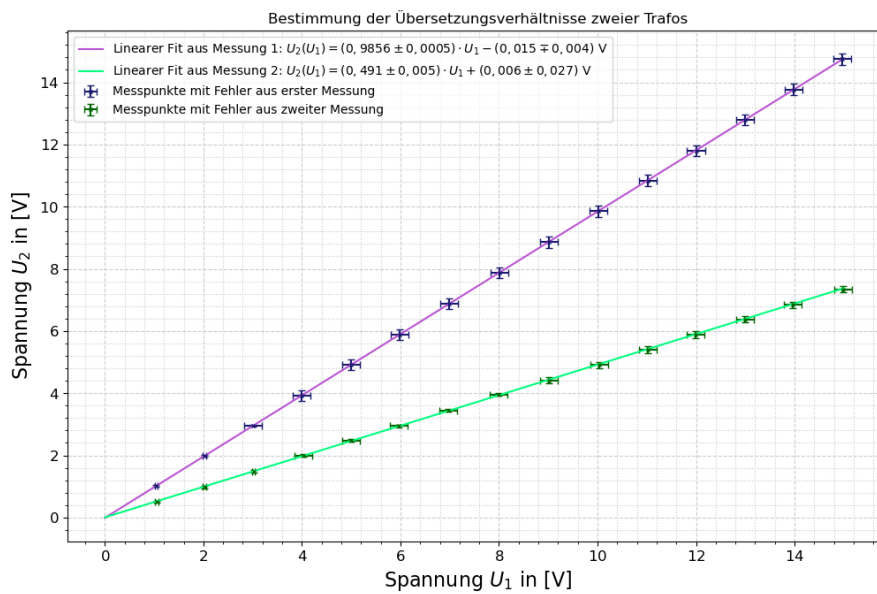


Abbildung 8: Sekundärspannung aufgetragen gegen die Primärspannung mit linearem Fit durch SciPy.optimize; für erstere Messpunkte ergibt sich ein anderer Fehler, da die Skala des Multimeters für größere Messwerte auf Hunderstel statt Tausendstel Volt wechselt, wodurch sich auch andere größte Werte für Gleichung 4.0.1 ergeben

In Tabelle 1 sind die Geradensteigungen noch einmal aufgelistet.

Geradensteigung m_1 aus Messung 1	Geradensteigung m_2 aus Messung 2
$0,9856 \pm 0,0005$	$0,491 \pm 0,005$

Tabelle 1: Geradensteigungen für Fits aus Abbildung 8

Die Geradensteigungen aus Tabelle 1 ergeben sich durch

$$m_i = \frac{U_2}{U_1}. \quad (4.0.2)$$

Das Übersetzungsverhältnis erhalten wir also aus dem Kehrwert der Geradensteigungen, s. Gleichung 2.1.9. Dann ergibt sich mit dem Fehler für u nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 von

$$\sigma_u = \frac{\sigma_m}{m^2} \quad (4.0.3)$$

die Werte

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,0146 \pm 0,0006 \text{ für den ersten Trafo aus Messung 1 und} \\ u_2 &= 2,037 \pm 0,021 \text{ für den zweiten Tao aus Messung 2} \end{aligned}$$

Die zu erwartenden Werte erhalten wir aus Gleichung 2.1.4. Für die erste Messung haben sowohl die erste Spule als auch die zweite Spule des Transformators 300 Windungen, da jeweils zwei SPulen mit á 150 Windungen in Reihe geschaltet sind. Damit erwarten wir einen theoretischen Wert für die erste Messung von

$$u_{\text{theo, 1}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{300}{300} = 1.$$

Bei der zweiten Messung besteht die Sekundärwicklung nur aus einer Spule und hat damit lediglich 150 Windungen, sodass wir

$$u_{\text{theo, 2}} = \frac{300}{150} = 2 \quad (4.0.4)$$

erwarten. Damit handelt es sich in der ersten Messung theoretisch um eine direkte Übersetzung derselben Spannung, die allerdings durch den Wirkungsgrad κ , welcher kleiner als 1 ist, da es sich nicht um einen idealen Transformator handeln kann, heruntertransformiert wird. Mit $u \approx 2$ wird die Spannung U_1 gewollt auf die Hälfte heruntertransformiert.

In Abbildung 9 erkennt man den trigonometrischen Zusammenhang zwischen der Phasenverschiebung ϕ und dem Strom an Widerstand und Transformator. Die blaue Linie halbiert I_{ges} , und steht im rechten Winkel dazu. Über die trigonometrische Beziehung des Kosinus folgt damit

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{I_{ges}}{2I_1} \quad (4.0.5)$$

Diese Zusammenhang gilt für $I_{1,T}$ und $I_{1,R}$. Die Werte für ϕ nach dieser Formel können nur für vier von sechs der Messwerte bestimmt werden, da I_{ges} kleiner sein muss als $2I_1$. Andernfalls kann man keinen arccos des Bruches berechnen. Lässt man nun diese zwei Messpunkte raus (bei $I_2 = 0,75$ und $I_2 = 0,5$), erhält man die Werte in Tabelle 2.

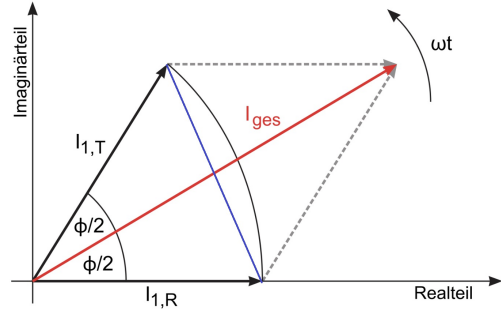


Abbildung 9: Zeigerdiagramm nach [5], verändert durch Autor

I_2 in [A]	ϕ in [°]
0	$85.16 \pm 0,02$
1	16 ± 52
1,25	20 ± 33
1,5	31 ± 18

Tabelle 2: ϕ bestimmt durch Gleichung 4.0.5, für vier von 6 genommenen Messungen

Diese sind zusammen mit den anderen Messungen und Berechnungen noch einmal in Abbildung 10 dargestellt. Die Fehler wurde dabei nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 berechnet mit

$$\sigma_\phi = \sqrt{\sigma_{I_{ges}}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{4I_1^2 - I_{ges}^2}} \right)^2 + \sigma_{I_1}^2 \left(\frac{2I_{ges}}{I_1 \sqrt{4I_1^2 - I_{ges}^2}} \right)^2} \quad (4.0.6)$$

Nachfolgend wird die Phasenverschiebung ϕ zwischen Primärspannung und Primärstrom in Abhängigkeit der Sekundärspannung I_2 aus Abbildung 11 bis Abbildung 22 berechnet. Die Graphen stammen aus dem Oszilloskop.

Die Phasenverschiebung wird wahrscheinlich von U_2 aus Channel 2 zu U_1 aus Channel 1 berechnet, wobei an Channel 2 die Stromzange, welche den Primärstrom I_1 misst und dann eine Spannung in das Oszilloskop einspeist, angeschlossen ist und an Channel 1 das Oszilloskop zum Abgriff der Spannung parallel geschaltet wurde. Da der Strom allerdings der Spannung um Phasenverschiebung ϕ hinterhereilt, benötigt man die Differenz $\phi = \frac{t_2 - t_1}{T}$ zur Bestimmung der Phasenverschiebung. Die erreicht man durch Addition von 180° . Dabei ist t_2 ein x-Wert an Channel 2 der Spannung U_2 und t_1 der Spannung U_1 . Der Fehler $\sigma_{\phi, xt}$ aus den xt-Plots des Oszilloskops ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 zu

$$\sigma_{\phi, xt} = \frac{180}{\pi} \cdot \sqrt{(\sigma_{t_2} T^{-1})^2 + (\sigma_{t_1} T^{-1})^2 + \sigma_T^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{T^2} \right)^2}. \quad (4.0.7)$$

Weiterhin kann man auch aus den xy-Plots in Abbildung 11 bis Abbildung 22 die Phasenverschiebung ϕ aus den Lissajous-Figuren berechnen. Aus trigonometrischen Beziehungen ergibt sich die Formel

$$\phi = \arcsin \left(\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1} \right) \quad (4.0.8)$$

in Radiant. Hierbei bezeichnen U_1 und U_2 die y-Achsenabschnitte der Ellipsen mit $U_1 < U_2$ und V_1 bzw. V_2 die y-Koordinaten der y-Maxima für die Ellipsen mit $V_1 < V_2$. Der Fehler ergibt sich abermals nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 zu

$$\sigma_{\phi, xy} = \left(1 - \frac{(U_1 - U_2)^2}{(V_1 - V_2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (V_2 - V_1)^{-1} \left(\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2 + (\sigma_{V_2}^2 + \sigma_{V_1}^2) (U_1 - U_2)^2 (V_2 - V_1)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.0.9)$$

Die Umrechnung in Grad ($^\circ$) erfolgt durch Multiplikation der Werte mit $\frac{180}{\pi}$. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt.

I_2 in [A]	Phase in [°] des Oszis	ϕ in [°] nach Umrechnung	ϕ aus Lissajous in [°]
0	-174	6 ± 8	kein Wert
0,5	-171	9 ± 5	15 ± 9
0,75	-165	15 ± 5	20 ± 7
1	-158	22 ± 5	25 ± 6
1,25	-154	26 ± 5	28 ± 7
1,5	-147	33 ± 5	38 ± 8

Tabelle 3: Phasenverschiebung ϕ bestimmt durch verschiedene Methoden zwischen U_1 und I_2 , Lissajous meint die xy-Plots des Oszi,. Der Fehler der Sekundärbelastung I_2 für die Phase ϕ durch die xt-Plots des Oszi ist höher, da in Abbildung 11 zu sehen ist, dass die Spannung U_2 durch die Stromzange stark verrauscht ist

Die Phase durch die Lissajous-Figur in Abbildung 12 ergibt keinen Wert, da das Argument des arcsin in Gleichung 4.0.8 mit 3 größer als 1 ist, was wegen der Surjektivität einer Umkehrfunktion nicht definiert ist.

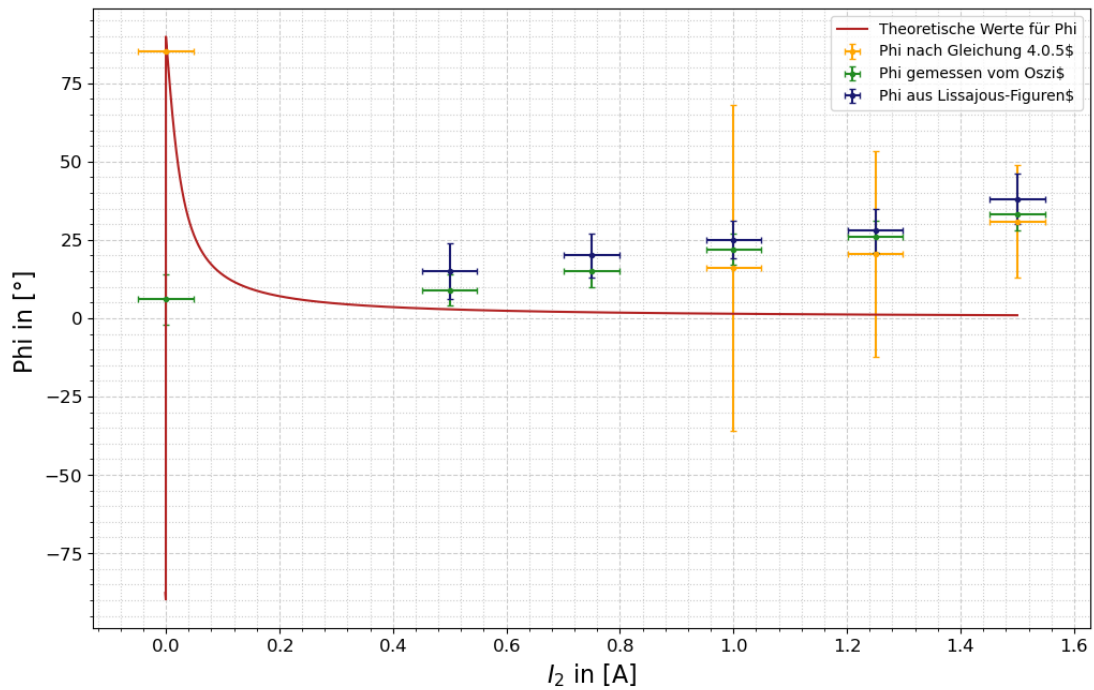


Abbildung 10: ϕ bestimmt durch die Formel Gleichung 4.0.5, abgelesen am Plot des Oszillators, bestimmt aus den Lissajous-Figuren und eine theoretisch erwartete Kurve nach Gleichung 2.2.2

In Abbildung 10 sind die für ϕ berechneten Datenpunkte aus Tabelle 2 und Tabelle 3 für die betrachteten Stromstärken I_2 eingetragen, sowie eine Theorie-Kurve berechnet nach Gleichung 2.2.2

Zur Berechnung der Wirk- und Verlustleistung nutzen wir Gleichung 2.2.3 und Gleichung 2.2.4.

Strom und Spannung nehmen wir aus der dritten Messung, wo diese direkt bei einem Laststrom von 1,5 A gemessen wurden. Dann sind diese: $U = (14,90 \pm 0,05) \text{ V}$ und Strom $I = (1,52 \pm 0,06) \text{ A}$. Da die Phase, welche für die Formel benötigt wird, auf drei verschiedene Arten berechnet wurde, werden die Leistungen für jede Phasenverschiebung bei einem Laststrom von 1,5 A bestimmt, und anschließend mit Gleichung 6.2.2 und Gleichung 6.2.3 gemittelt.

Der Fehler der Spannung ergibt sich wieder mit Gleichung 4.0.1. Der des Stroms ist ganz ähnlich mit

$$\sigma_I = 0,015 \cdot \text{Wert} + 3 \text{ kleinste Skalenteile.} \quad (4.0.10)$$

Nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 ergeben sich die Fehler der Leistungen zu

$$\sigma_{P_W} = \sqrt{(\sigma_U \cdot I \cos(\phi))^2 + (\sigma_I \cdot U \cos(\phi))^2 + (\sigma_\phi \cdot UI \sin(\phi))^2} \quad (4.0.11)$$

bzw.

$$\sigma_{P_V} = \sqrt{(\sigma_U \cdot I \sin(\phi))^2 + (\sigma_I \cdot U \sin(\phi))^2 + (\sigma_\phi \cdot UI \cos(\phi))^2}. \quad (4.0.12)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 dargestellt.

Herkunft	Phasenverschiebung ϕ in $[\circ]$	Wirkleistung P_W in [W]
Messung 3	31 ± 18	19 ± 4
Messung 4 a	33 ± 5	$19,0 \pm 1,3$
Messung 4 b	38 ± 8	$18 \pm 2,1$
		Verlustleistung P_V in [W]
Messung 3	31 ± 18	12 ± 7
Messung 4 a	33 ± 5	$12 \pm 1,8$
Messung 4 b	38 ± 8	$14 \pm 2,6$

Tabelle 4: Wirkleistungen für Laststrom von 1,5 A für verschiedene Phasen ϕ

Die gewichteten Mittelwerte ergeben

$$P_W = (18,7 \pm 1,1) \text{ W für den Wirkstrom und}$$

$$P_V = (12,6 \pm 1,5) \text{ W für den Verluststrom.}$$

5 Diskussion

Aus Abbildung 7 ist ersichtlich, dass der verwendete Transformator kein perfekter Transformator ist. Dies sieht man auch an den bestimmten Werten der Übersetzungsverhältnisse, wo $u_1 = 1,0146 \pm 0,0006$ ein $25\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretisch erwarteten Wert von 1 hat, und $u_2 = 2,037 \pm 0,021$ ein $2\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretisch erwarteten Wert von 2.

Das große Fehlerintervall liegt an der Funktionsweise von dem verwendeten Tool SciPy.Optimize, das einen sehr kleinen Fehler für diesem Plot angibt. Somit wäre es hier ggfs. sinnvoll für zukünftige Experimente ein besseres Tool für diese Art Berechnungen zu finden.

Die Phasenverschiebung wurde auf drei verschiedene Arten aus dem Messwerten bestimmt: über Gleichung 4.0.5, durch das Oszilloskop und aus den Lissajous-Figuren.

Dabei kann man diese Werte mit den theoretisch erwarteten vergleichen. All diese sind in Abbildung 10 eingezeichnet. An diesem Plot ist leicht zu sehen, dass um den Nullpunkt eine Polstelle ist, an der die Phasenverschiebung einen starken Anstieg hat. Demnach liegen hier die errechneten Wert weit auseinander und es scheint nicht sinnvoll, dort die σ -Intervalle zu vergleichen. Es ist jedoch zu sehen, dass der errechnete Wert durch Gleichung 4.0.5 und der vom Oszilloskop gemessene Wert mit jeweiligem Fehler innerhalb des $1\text{-}\sigma$ -Intervalls auf der Theorie-Kurve liegen. Der Wert der Lissajous-Figuren bei $I_2 = 0\text{ A}$ konnte nicht bestimmt werden, da die Plots des Oszilloskops für diesen Wert eine große Unsicherheit aufwiesen, mit sehr starkem Rauschen in den gemessenen Daten, vgl. Abbildung 11 und Abbildung 12. Für alle weiteren Messpunkte stimmen die Werte des Oszilloskops etwa mit den anderen errechneten Werten überein, damit ist anzunehmen, dass das Oszilloskop bei niedrigem Strom ungenaue Werte misst.

Die Werte für $I_2 = 0,5\text{ A}$ und $I_2 = 0,75\text{ A}$ konnte durch Gleichung 4.0.5 kein Wert bestimmt werden, da $\frac{I_{ges}}{2I_1} > 1$, und somit der arccos aus diesem Werten mathematisch nicht existiert.

Die Werte der Lissajous-Figuren liegen für diese beiden Stromstärken mit $(15 \pm 9)^\circ$ und $(20 \pm 7)^\circ$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zu den Werten des Oszilloskops mit $(9 \pm 5)^\circ$ und $(15 \pm 5)^\circ$, und haben ein 2-, bzw. 3- σ -Intervall zu den Werten der Theorie-Kurve, welche etwa $2,826^\circ$ und $1,885^\circ$ sind. Für $I_2 = 0,5\text{ A}$ liegt der Oszilloskop Messwert in einem $2\text{-}\sigma$ -Intervall zum Wert der Lissajous-Figuren und für $I_2 = 0,75\text{ A}$ ergibt sich ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall. Auch hier ergeben sich zu den theoretischen Werten ein 2- und ein 3- σ -Intervall.

Für $I_2 = 1\text{ A}$ liegen alle anderen Werte im $1\text{-}\sigma$ -Intervall des Werts $(16 \pm 52)^\circ$ berechnet nach Gleichung 4.0.5. Der Wert des Oszilloskops von $(22 \pm 5)^\circ$ hat ein $2\text{-}\sigma$ -Intervall zum berechneten Wert, ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum Wert $(25 \pm 6)^\circ$, bestimmt aus den Lissajous-Figuren und ein $5\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert, welcher etwa $1,414^\circ$ beträgt. Der Wert der Lissajous-Figuren hat ein $2\text{-}\sigma$ -Intervall zum berechneten Wert, ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum Wert des Oszilloskops und ein $4\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert.

Die σ -Intervalle für $I_2 = 1,25\text{ A}$ sind für alle bestimmten Werte die selben wie für das vorige I_2 , bei einem theoretischen Wert von etwa $1,131^\circ$.

Für $I_2 = 1,5 \text{ A}$ hat der berechnete Wert von $(31 \pm 18)^\circ$ wieder ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall zu den anderen zwei bestimmten Werten und ein $2\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert von etwa $0,943^\circ$. Der vom Oszilloskop bestimmte Wert von $(33 \pm 5)^\circ$ hat auch ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall zu beiden anderen Werten und ein $7\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert. Auch der Wert der Lissajous-Figuren hat ein $1\text{-}\sigma$ -Intervall zu den beiden anderen errechneten Werten und ein $5\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert.

Damit liegen alle berechneten Werte sehr nah beieinander mit einem im Vergleich deutlichen Abstand zu den theoretischen Werten. Dies ist auch in Abbildung 10 zu erkennen, wo die Theorie-Kurve bei höheren I_2 gegen Null läuft, die anderen Werte jedoch ansteigen. Es ist zu vermuten, dass das daran liegt, dass der Transformator kein perfekter Transformator ist, wie in der Gleichung angenommen.

Für die Wirkleistung und die Verlustleistung befinden sich alle Werte aus Tabelle 4 gegenseitig und auch die gewichteten Mittelwerte in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall. Alle Rechenergebnisse streuen also sehr nah um den gewichteten Mittelwert. Dieser Umstand ist wichtig, da die Leistung aufgrund der Phasenverschiebung nicht direkt messbar ist und die in die Formel eingehenden Größen Spannung und Strom nur mit einem kleinen Fehler gemessen werden können. Die Phasenverschiebung muss dann ausgerechnet werden. Dass sich nach jeder Methode zur Bestimmung der Phasenverschiebung ϕ ein mit anderen Werten verdichtetes Intervall ergibt, ist der umständlichen Methodik zur Berechnung der Leistung zwischen phasenverschobenen Strom und Spannung zuträglich.

6 Anhang

6.1 Plots des Oszilloskops aus vierter Messung

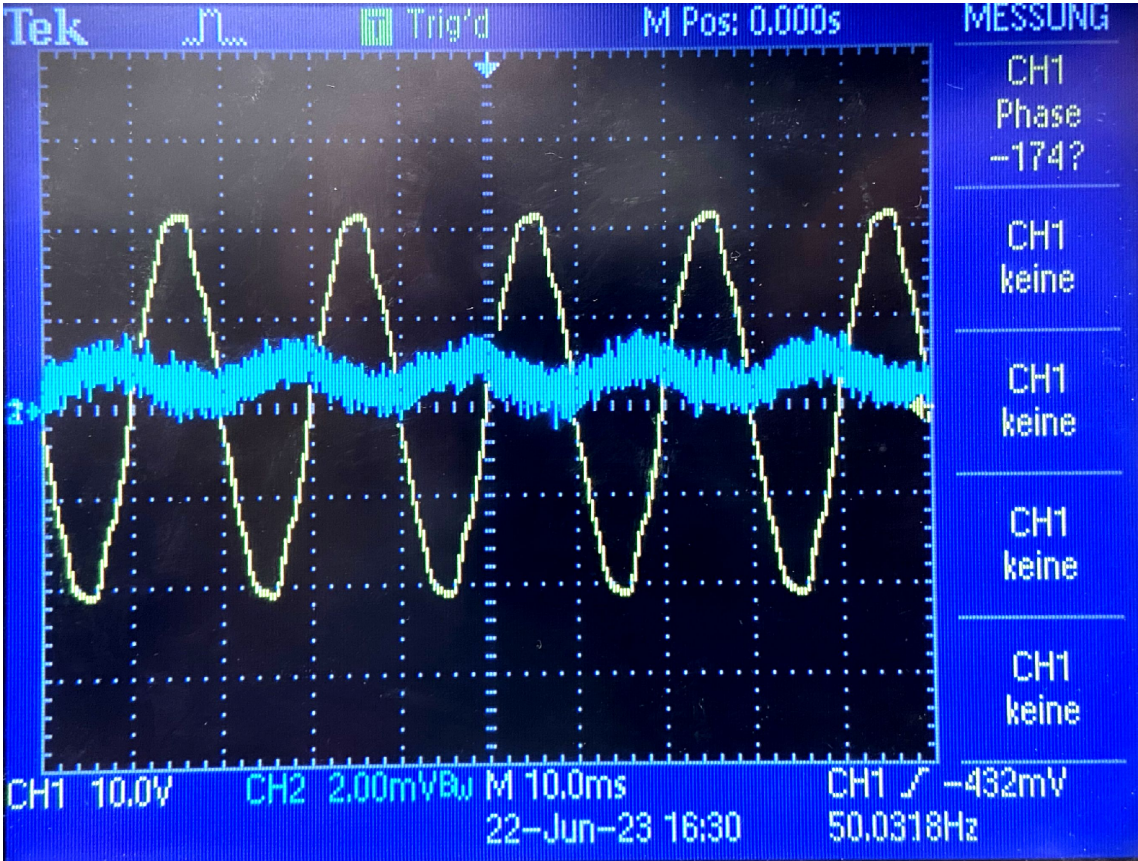


Abbildung 11: xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 0$ A mit zweifelhafter Phasenverschiebung ϕ

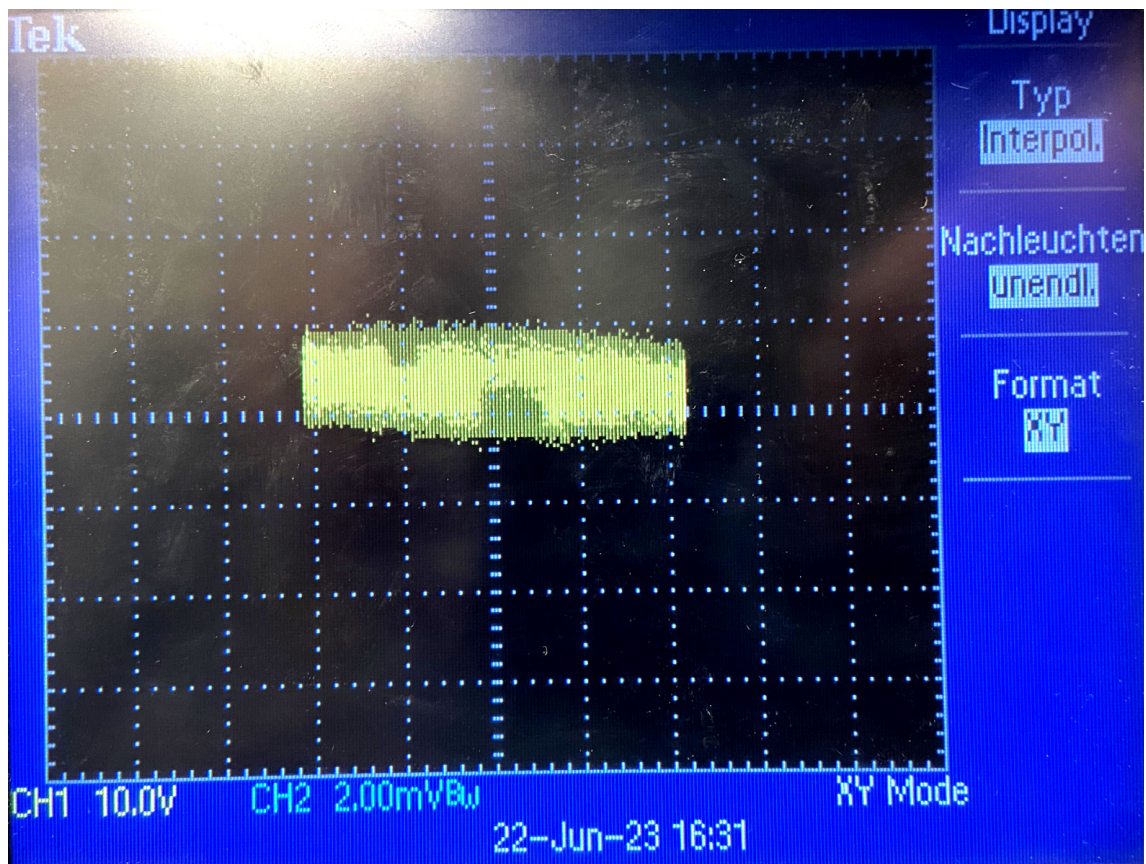


Abbildung 12: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0$ A

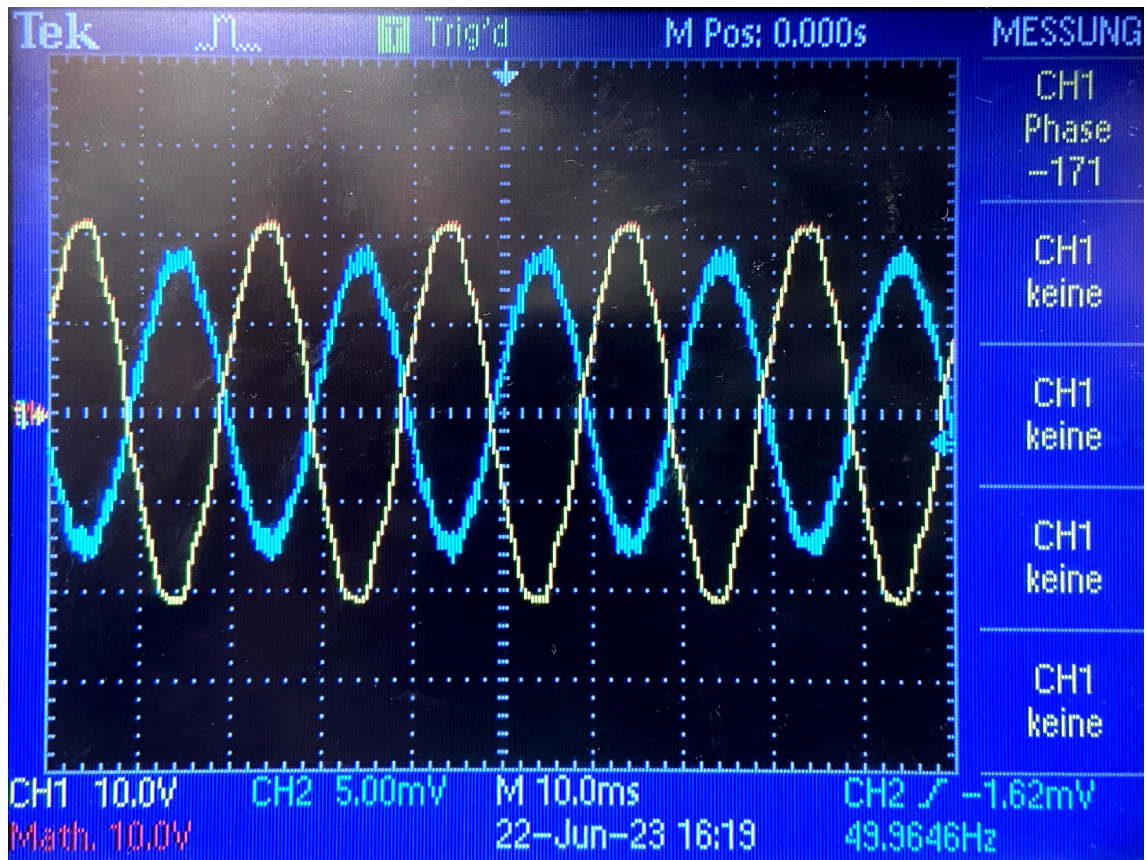


Abbildung 13: xt-Plot als für Sekundärstrom $I_2 = 0,5 \text{ A}$

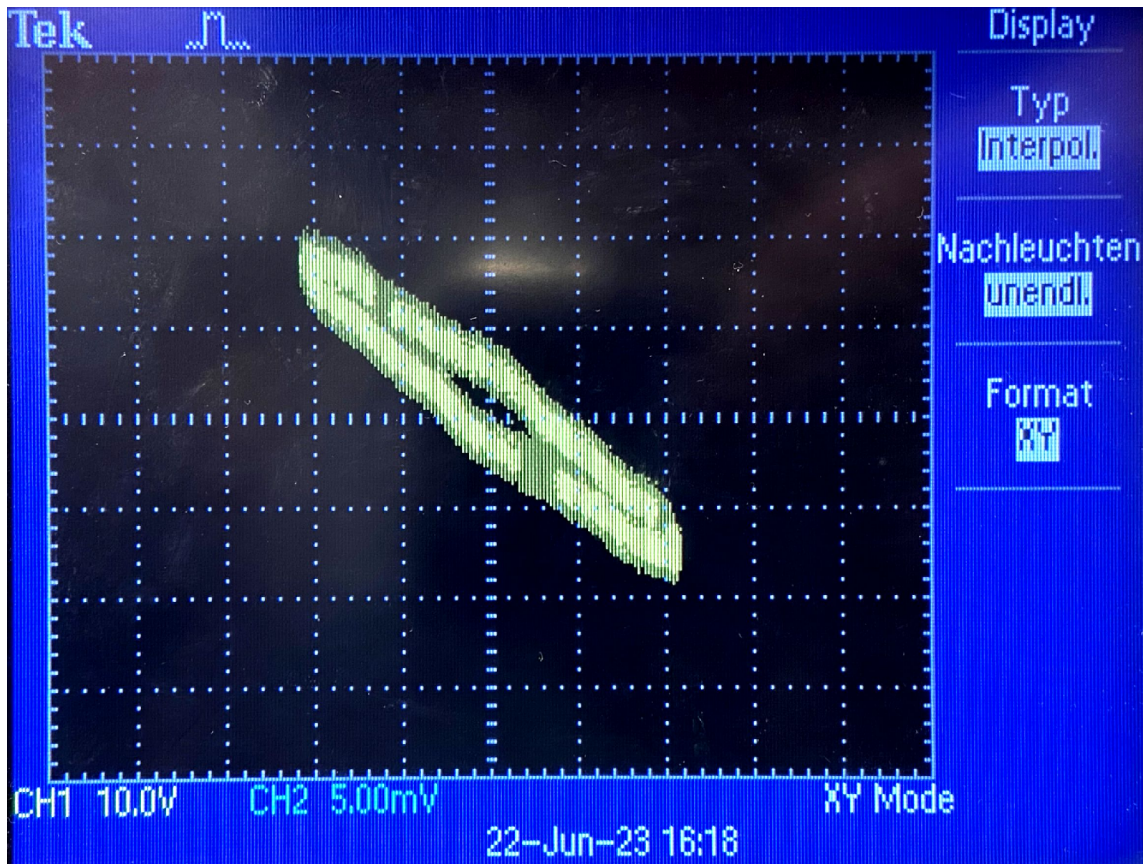


Abbildung 14: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0,5 \text{ A}$

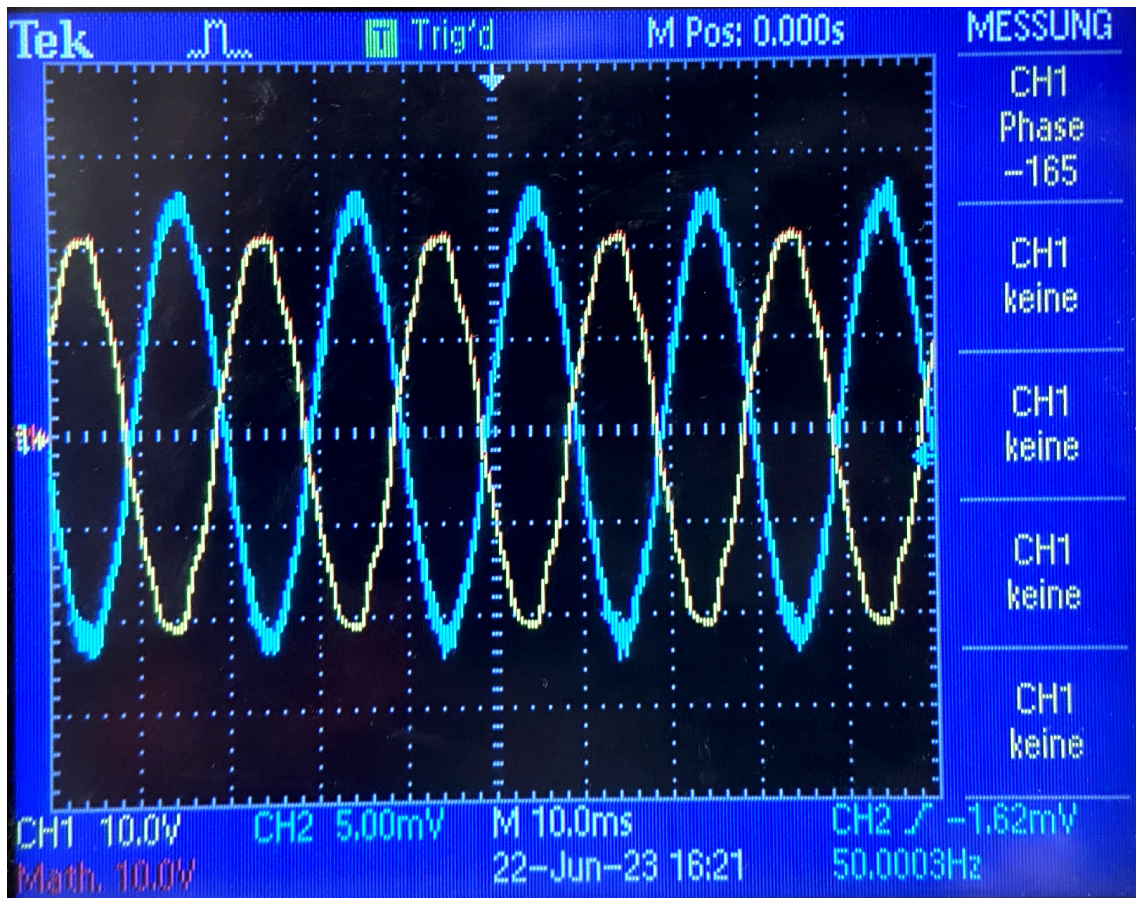


Abbildung 15: xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 0,75 \text{ A}$

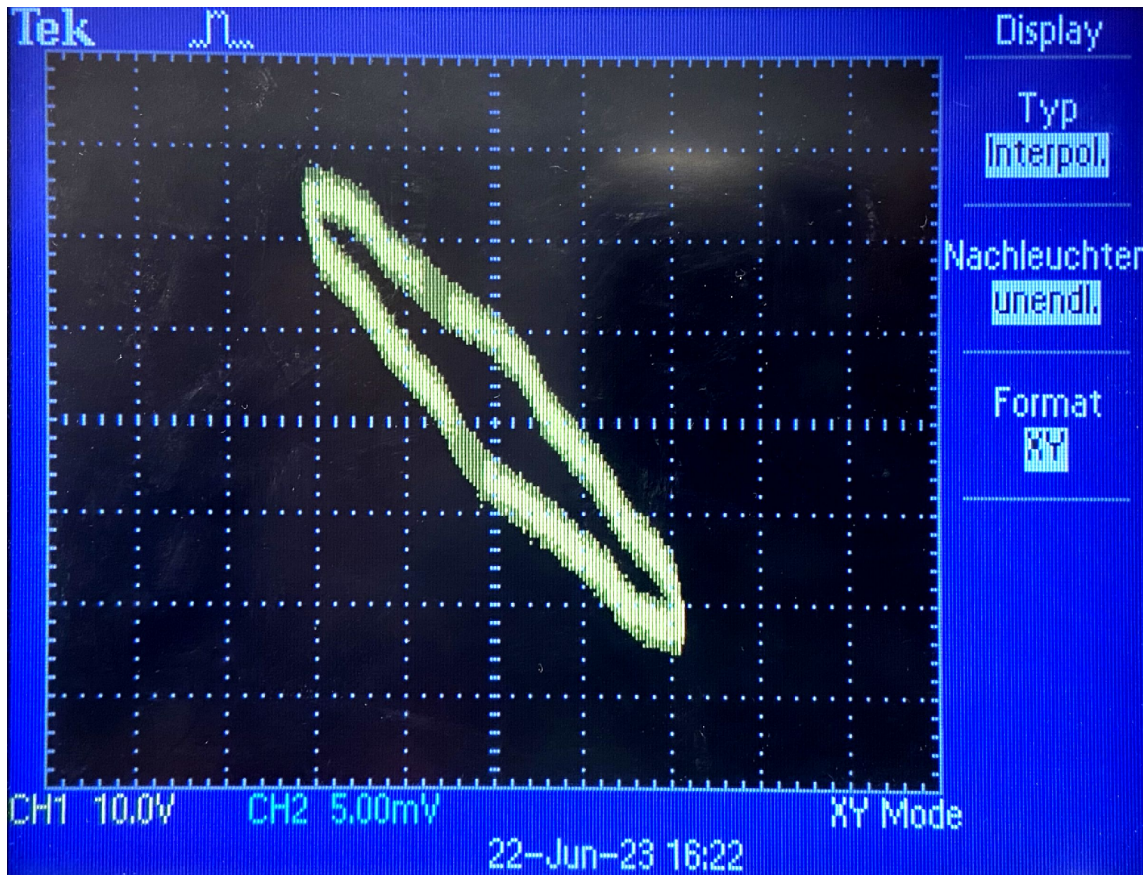


Abbildung 16: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0,75 \text{ A}$

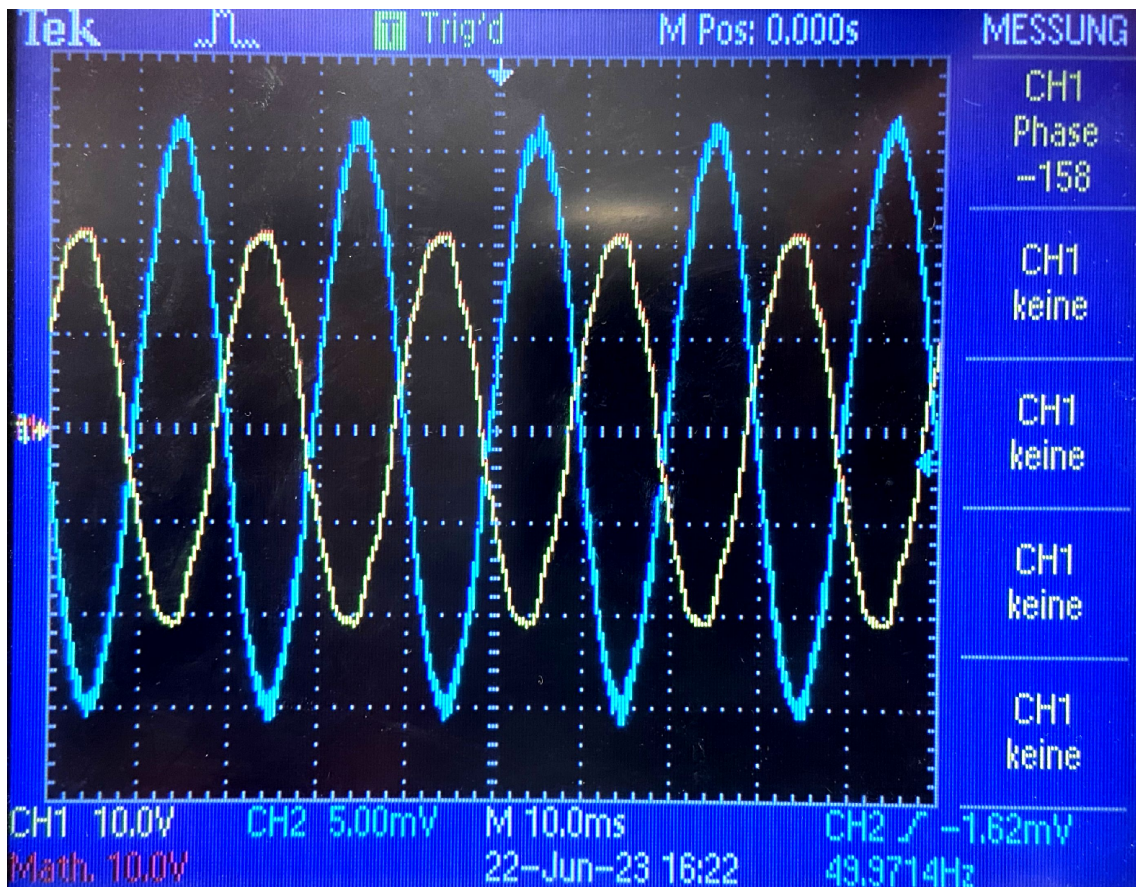


Abbildung 17: xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1 \text{ A}$

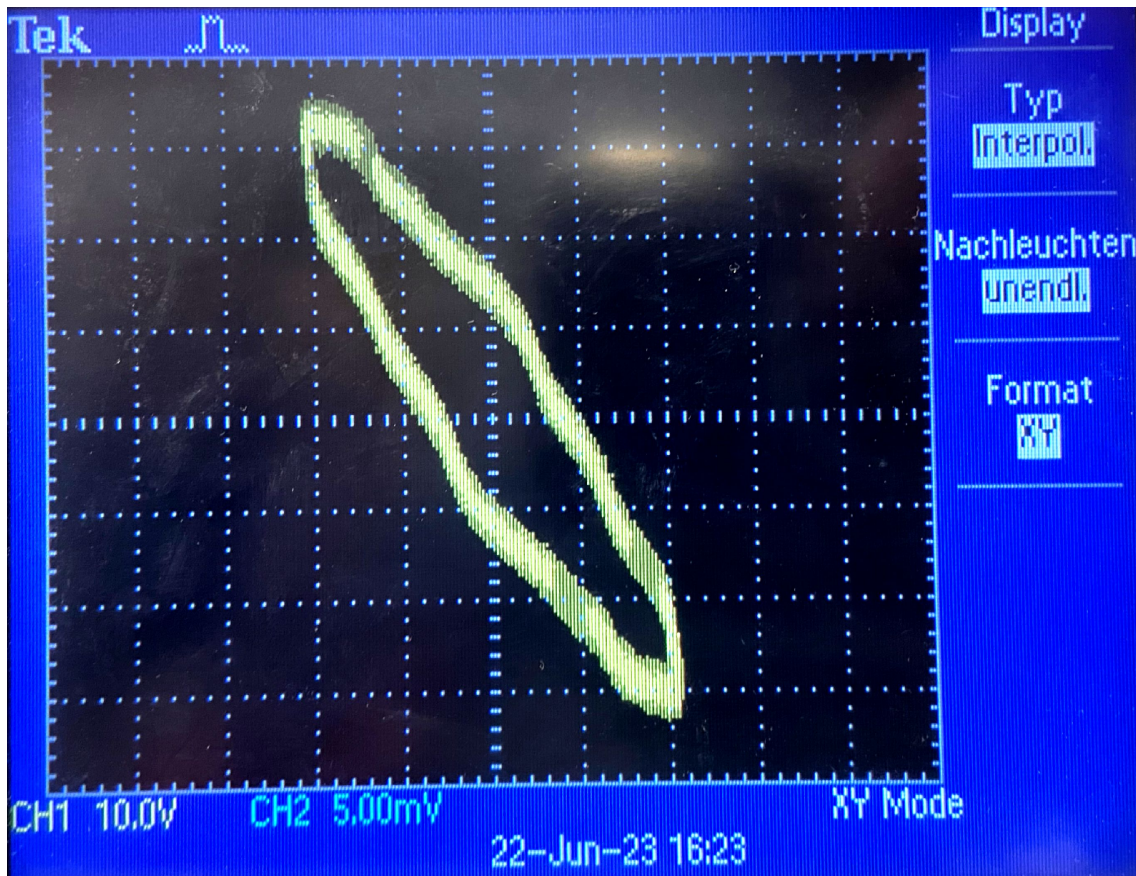


Abbildung 18: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1\text{ A}$

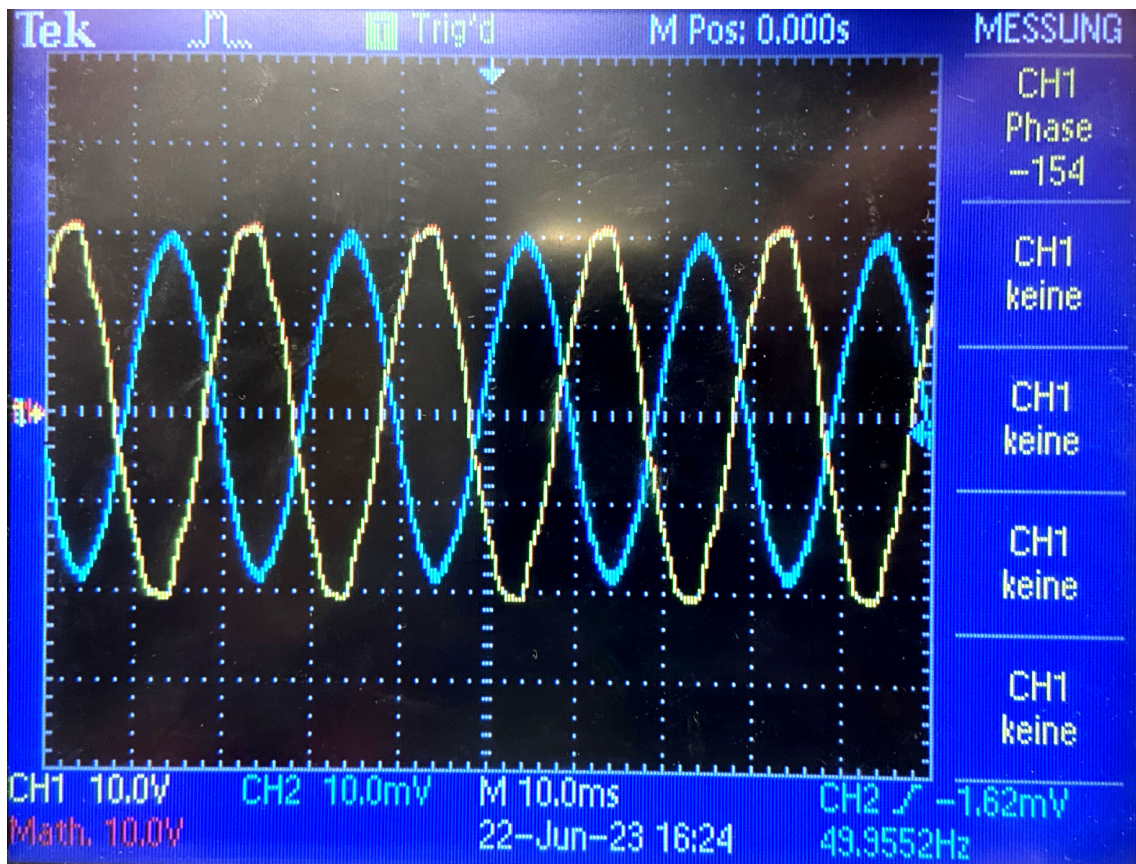


Abbildung 19: xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1,25\text{ A}$

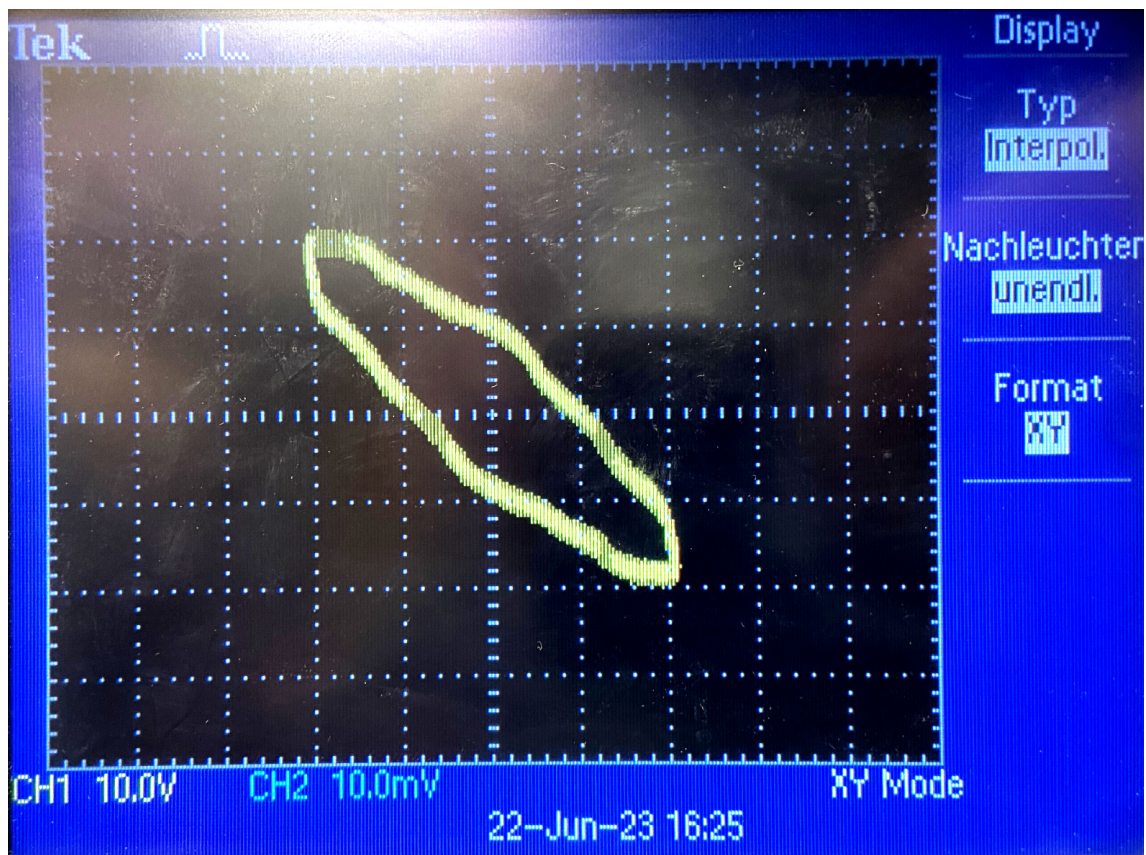


Abbildung 20: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1,25 \text{ A}$

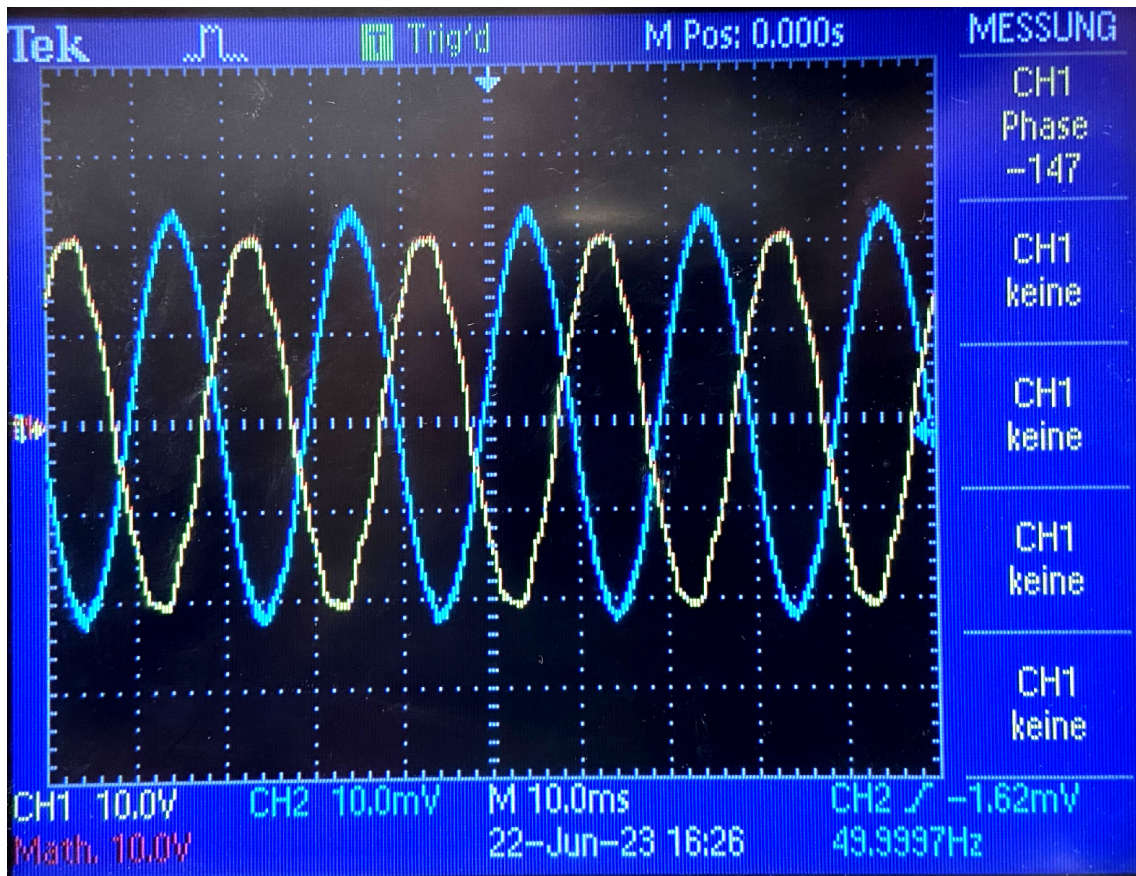


Abbildung 21: xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1,5 \text{ A}$



Abbildung 22: xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1,5 \text{ A}$

6.2 Fehlerformeln

Formeln für die Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.2.1)$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.2.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.2.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.2.4)$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right)^2 + \left(\sigma_B \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right)^2} \quad (6.2.5)$$

Lineare Regression; die Steigung m und der Achsenabschnitt b den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.9)$$

Literatur

- [1] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik*. Springer Spektrum, 6. edition, 2013.
- [2] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 25. edition, 2015.
- [3] Gerhard Steiner Paul Wagner, Georg Reischl. *Einführung in die Physik*. Facultas Verlags- und Buchhandel AG, 4. edition, 2020.
- [4] R. Ring. Transformator, Trafo, 2008. <https://www.modellbahntechnik-aktuell.de/artikel/transformator-trafo/#>, last access: 26.06.23.
- [5] Große-Knetter J. Schaaf, P. *Das Physikalische Praktikum*. Universitätsverlag Göttingen, 2022.

Abbildungsverzeichnis

1	beispielhafter Trafo für eine analoge Eisenbahn; aus [4]	3
2	Schematische Darstellung eines Transformators mit höherer Windungszahl N_2 als N_1 ; der Eisenkern ist mit der Stromdichte B und der Feldstärke H durchsetzt; aus [5, S. 128]	4
3	Zeigerdiagramm nach [5], verändert durch Autor	6
4	Versuchsaufbau, mit allen benötigten Geräten	8
5	Transformator Anschlüsse	8
6	Schaltkreis des Versuchsaufbaus, mit	9
7	U_1 aufgetragen gegen I_1 vom unbelasteten Transformator, mit Ausgleichsgrade durch Python Optimize	10
8	Sekundärspannung aufgetragen gegen die Primärspannung mit linearem Fit durch SciPy.optimize; für erstere Messpunkte ergibt sich ein anderer Fehler, da die Skala des Multimeters für größere Messwerte auf Hunderstel statt Tausenstel Volt wechselt, wodurch sich auch andere größte Werte für Gleichung 4.0.1 ergeben	11
9	Zeigerdiagramm nach [5], verändert durch Autor	13
10	ϕ bestimmt durch die Formel Gleichung 4.0.5, abgelesen am Plot des Oszillators, bestimmt aus den Lissajous-Figuren und eine theoretisch erwartete Kurve nach Gleichung 2.2.2	16
11	xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 0$ A mit zweifelhafter Phasenverschiebung ϕ	20
12	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0$ A	21
13	xt-Plot als für Sekundärstrom $I_2 = 0,5$ A	22
14	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0,5$ A	23
15	xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 0,75$ A	24
16	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 0,75$ A	25
17	xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1$ A	26
18	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1$ A	27
19	xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1,25$ A	28
20	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1,25$ A	29
21	xt-Plot für Sekundärstrom $I_2 = 1,5$ A	30
22	xy-Plot als Lissajous-Figure für Sekundärstrom $I_2 = 1,5$ A	31