

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 14
Magnetfeld von Spulen

Praktikant/in:

Mitpraktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 29.06.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Magnetfelder verschiedener Spulen	4
2.2	Die Hallsonde	5
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Proportionalitätskonstante des Stromintegrators bestimmen	7
4.2	Magnetfeld der Luftspule	7
4.3	Magnetfeld der Helmholtzspule	10
4.4	Induktionskonstante μ_0	11
5	Diskussion	12
6	Anhang	14
6.1	Formel zur Bestimmung der Eichkonstanten κ	14
6.2	Genauere Betrachtung der Berechnung von μ_0	14
6.3	Fehlerformeln	16
	Literatur	17

1 Einleitung

Ob man auf dem Weg zur Universität mit dem Elektro-Fahrrad fährt, Musik hört, oder abends die Lieblings-Serie im Fernseher ansieht: Magnetfelder von Spulen sind im Alltag überall zu finden. Auch in der Forschung werden Spulen und deren Magnetfelder oft verwendet, wie zum Beispiel im Large Hadron Collider, wo sich Magnetfelder von Spulen zu nutze gemacht werden um geladenen Teilchen zu beschleunigen. Sogar in der Medizin finden Magnetfelder von Spulen eine Anwendung: die Magnetresonanztomographie (MRT).

Bei all diesen Anwendungen gibt es verschiedene Arten von Spulen, die verwendet werden. Dabei ist es wichtig genau zu wissen, wie sich diese Magnetfelder verhalten, um zum Beispiel bei einem MRT sicherzustellen, dass von ihnen keine Gefahr für die Patienten ausgeht und die Bildqualität best möglich ist.

Um besser zu beleuchten, wie sich spezifische Magnetfelder von verschiedenen Spulen verhalten, und welche Methoden es zur Messung dieser Felder gibt, werden in diesem Experiment drei verschiedene Spulen betrachtet: die sogenannte Helmholtzspule, eine lange Luftspule und eine kurze Luftspule. Dafür werden durch verschiedene Verfahren die magnetische Flussdichte in Abhängigkeit vom Ort gemessen und sowohl die Magnetfelder selbst, als auch die Genauigkeit der Messverfahren verglichen.

2 Theorie

Bei Magnetfeldern sind zwei wichtige physikalische Größen maßgeblich: die magnetische Flussdichte \vec{B} , und die magnetische Feldstärke \vec{H} . Zwischen diesen gilt der Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (2.0.1)$$

wobei μ_r die Permeabilitätskonstante des Materials in der Spule ist. Bei Luft kann $\mu_r \approx 1$ angenommen werden. μ_0 ist eine Proportionalitätskonstante, mit dem Literaturwert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}}$.

Nach dem Induktionsgesetz wird durch die Änderung eines Magnetfeldes in einer Leiterschleife eine Spannung induziert [4, S. 116] mit $U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$, wobei Φ der magnetische Fluss ist. Diesen kann man auch ausdrücken durch die umschlossene Fläche A und die Flussdichte \vec{B} durch diese Fläche. Genauso erzeugt eine Spannung an einer Spule mit n Windungen demnach ein Magnetfeld mit

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{ind} dt = nBA \quad (2.0.2)$$

2.1 Magnetfelder verschiedener Spulen

Für lange Spulen, mit $R \ll l$, kann man auftretende Randeffekte im erzeugten Magnetfeld durch die Entfernung zum Rand vernachlässigen und es gilt die Gleichung [4, S. 97]

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \quad (2.1.1)$$

mit einer Spule der Windungszahl n und Länge l , in der ein Strom I fließt.

In kleineren Spulen müssen jedoch Randeffekte beachtet werden. Betrachtet man nur Punkte auf der Symmetrieachse des Zylinders, gilt die Gleichung [3, vergl. S. 504]

$$B = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{nI}{l} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} \right) \quad (2.1.2)$$

wobei a der Abstand vom betrachteten Punkt zum Ende der Spule ist.

Diese Magnetfelder sind nicht immer homogen. Für eine einfachere Möglichkeit, Messungen in homogenen Magnetfeldern durchführen zu können, gibt es die sogenannten Helmholtzspulen. Diese sind ein Spulenpaar mit dem Abstand d , der gleich dem Radius der beiden Spulen ist. Dadurch wird zwischen den beiden Spulen ein nahezu homogenes

Magnetfeld erzeugt. Die magnetische Flussdichte kann dann berechnet werden durch [3, S. 503/504]

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 n I}{R} \quad (2.1.3)$$

Auch dieses Feld ist nur zwischen dem Spulenpaar homogen. Befindet man sich außerhalb des Spulenpaares, muss eine andere Gleichung verwendet werden. Nach [5, S.341/342] ist das Magnetfeld auf der Symmetriachse einer Leiterschleife gegeben durch

$$B(z) = \mu_0 \frac{IR^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.1.4)$$

Für zwei baugleiche Spulen mit n Windungen im Abstand R zueinander folgt durch Superposition nun die Gleichung

$$B(z) = \mu_0 \frac{nIR^2}{2} \cdot \left(\left(R^2 + \left(z - \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \left(R^2 + \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (2.1.5)$$

wobei R der Radius und Abstand der Spulen ist und z der Abstand auf der Symmetriachse zum Mittelpunkt zwischen den beiden Spulen.

2.2 Die Hallsonde

Die sogenannte Hallsonde wird zur Messung von Magnetfeldern verwendet. Dies funktioniert auf Grund des Hall-Effekts. Wird dünne Metallfolie mit der Dicke d , durch die ein Strom fließt, senkrecht zur Stromrichtung von einem Magnetfeld durchsetzt (vgl. Abbildung 1), so wird durch die Lorentzkraft ein Spannungsunterschied erzeugt.

Misst man nun diesen Spannungsunterschied, kann man durch die Gleichung [4, S. 91]

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (2.2.1)$$

die magnetische Flussdichte bestimmen. Dabei ist R_H der sogenannte Hall-Koeffizient, der vom Material der Hallsonde abhängt.

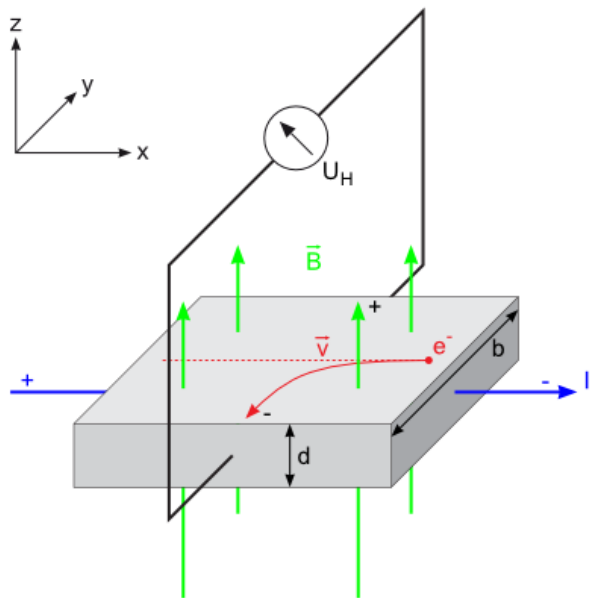


Abbildung 1: Funktionsweise einer Hallsonde, [1]

3 Durchführung

Für diesen Versuch werden die in Abbildung 2 dargestellten Materialien benötigt: zwei verschiedene Luftspulen und eine Helmholtzspule, sowie eine Induktionsspule, zwei Schutzwiderstände für den Schaltkreis, ein Stromintegrator und ein Zeitschalter mit 2 V Netzteil zum Kalibrieren des Stromintegrators, eine Hallsonde, ein Voltmeter und ein Ampèremeter.

Für den Versuch wird der in Abbildung 3 gezeigte Schaltplan verwendet. Zunächst muss der Stromintegrator kalibriert werden. Dafür wird der im Schaltplan blau umrandete Bereich verwendet. Zehn verschiedene Werte zwischen 50 und 500 ms werden auf dem Zeitschalter eingestellt und damit Stromimpulse vom Netzteil gesendet. Nachdem diese Kalibrierung abgeschlossen ist, wird der blau umrandete Teil des Schaltplans nicht mehr benötigt.

Die Induktionsspule wird in die lange Luftspule mittig eingeführt. In 2 cm Schritten wird nun durch den Stromintegrator die Ladung eines Stromstoßes durch Ein- und Ausschalten der Stromquelle gemessen. Die Stromstärke der Quelle ist dabei auf 0,5 A eingestellt. Diese Messung wird zusätzlich zu den Schritten in der Luftspule auch an fünf weiteren Punkten außerhalb der Luftspule durchgeführt.

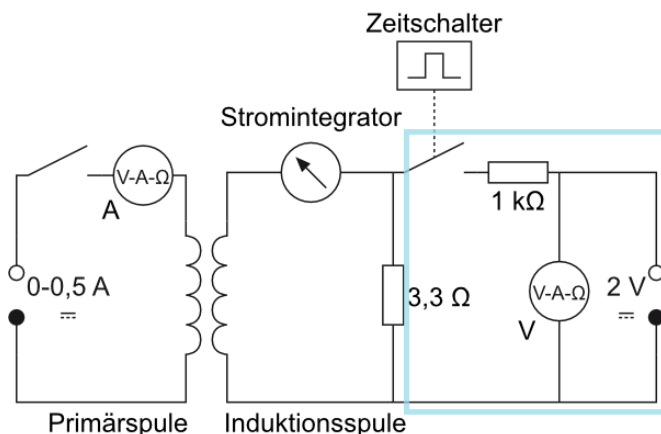


Abbildung 3: Schaltplan für die Messungen, sowie Anbau zum Kalibrieren des Stromintegrators, [2], Veränderungen durch Autor

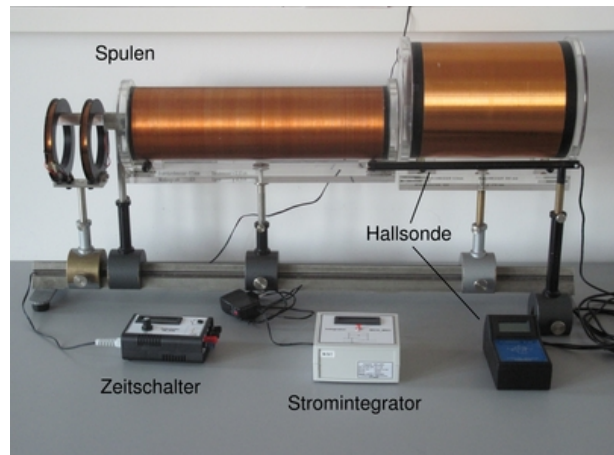


Abbildung 2: Versuchsaufbau mit benötigtem Material, [2]

Danach sind mit Hilfe der Hallsonde bei einer Stromstärke von 0,5 A die Magnetfelder der Luftspulen und der Helmholtzspule zu messen. Dies geschieht in Abhängigkeit der Position auf der Symmetrieachse, mit einer Schrittweite von 1 cm, wieder mit je fünf weiteren Messpunkten außerhalb der Spulen.

Zuletzt sind alle weiteren benötigten Spulendaten zu notieren: die Windungszahlen, Längen und Radien.

4 Auswertung

4.1 Proportionalitätskonstante des Stromintegrators bestimmen

Der Stromintegrator zeigt nicht direkt die integrierte Ladung an, sondern einen Wert x , der proportional dazu ist. Dafür gilt also $Q = x\kappa$. Dieser Faktor κ wird für alle weiteren Rechnungen benötigt und muss deswegen als erstes bestimmt werden.

Die Herleitung der Gleichung zum Berechnen von κ ist in Unterabschnitt 6.1, am Ende ergibt sich die folgende Gleichung mit der Fehlerrechnung nach Gleichung 6.3.4

$$\kappa = \frac{Ut}{R_i x} - \frac{R_1 Ut}{R_{ges} R_i x} \quad (4.1.1)$$

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\sigma_x^2 \cdot \left(\frac{Ut}{R_i x^2} - \frac{R_1 Ut}{R_{ges} R_i x^2} \right)^2 + \sigma_U^2 \cdot \left(\frac{t}{R_i x} - \frac{R_1 t}{R_{ges} R_i x} \right)^2} \quad (4.1.2)$$

Dabei ist $U = 2\text{V}$ die angelegte Spannung, $R_i = 10\text{k}\Omega$ der Eingangswiderstand des Stromintegrators, $R_1 = 1\text{k}\Omega$ der in Reihe geschaltete Widerstand, $R_2 = 3,3\Omega$ der parallel zum Stromintegrator geschaltete Widerstand, t die Impulszeit des Stromimpulses und x der angezeigte Wert des Stromintegrators.

Für den gewichteten Mittelwert von κ nach Gleichung 6.3.1 ergibt dies $\kappa = (4,82 \pm 0,14) \cdot 10^{-10}\text{C}$. Dabei wurden die Widerstände, sowie die Impulszeit als fehlerfrei angenommen. Der Fehler von U wurde auf $\sigma_U = \pm 0,03005\text{V}$ berechnet¹ und der Fehler des Stromintegrators wurde auf Grund von starken Schwankungen des Wertes während des Experiments auf ± 5 geschätzt. Dazu kommt ein Fehler von $\pm 0,5$ der Skalenbreite, was nach Gleichung 6.3.3 einen Gesamtfehler von $\sigma_x = \pm 5,03$ ergibt.

4.2 Magnetfeld der Luftspule

In Abbildung 4 sind die gemessenen Verläufe des Magnetfeldes der langen Spule eingetragen. Dabei wurde ein Fehler der Positionsmessung vom Abstand der Induktionsspule oder Hallsonde auf $\pm 0,7\text{cm}$ geschätzt, da trotz der benutzten Messschiene mit einer größeren Ungenauigkeit zu rechnen ist (mehr dazu in Abschnitt 5). Die Messungen des Magnetfeldes mit der Induktionsspule wurden sowohl für das Ein- als auch das Ausschalten des Primärstromkreises durchgeführt, sodass in Abbildung 4 zwei Reihen an Datenpunkten für die Messungen mit der Induktionsspule aufgetragen sind.

Dabei wurde die magnetische Flussdichte B bestimmt nach Gleichung 2.0.2 und mit $\int_{t_1}^{t_2} U_{ind} = R_i Q$, was nach B umgestellt folgende Gleichung ergibt:

$$B = \frac{R_i Q_{mess}}{nA} \quad (4.2.1)$$

¹Diese Berechnung ist nach Anleitung des Herstellers erfolgt, nach der Gleichung $\pm(0,5\% \text{ des Messwerts} + 2 \text{ Skalenteile})$, also $0,5\% \cdot 2,01\text{V} + 0,02\text{V}$

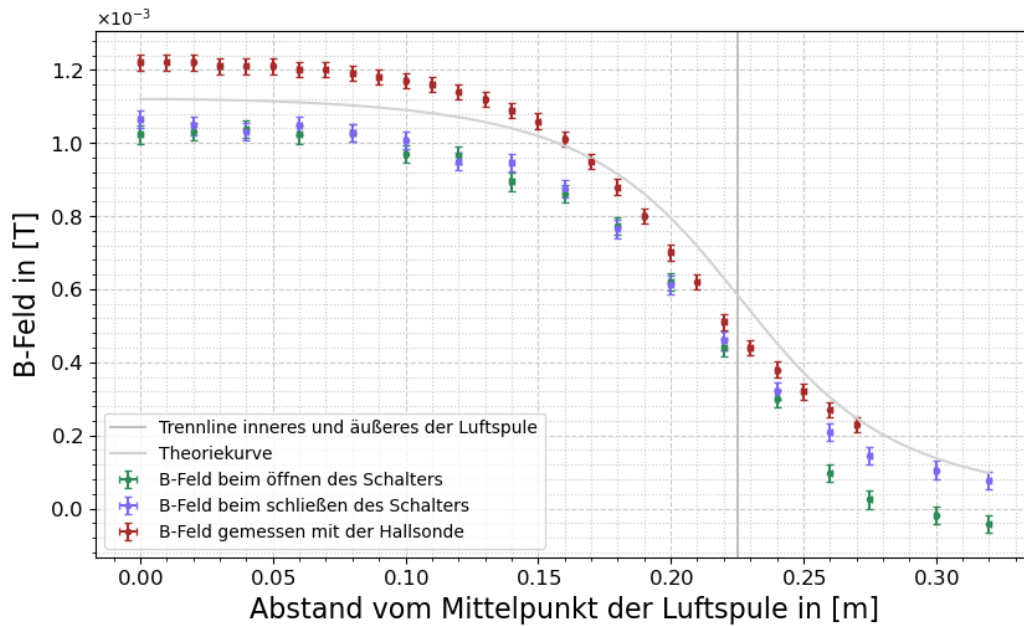


Abbildung 4: Magnetfeldmessung der langen Luftspule mit Induktionsspule und Hallsonde, sowie eine Theoriekurve zum Vergleich

Dabei sind A die Querschnittsfläche und n die Windungszahl der Induktionsspule und Q die vom Stromintegrator gemessene Ladung. Der Fehler für den Wert von B ist nach Gleichung 6.3.4 bestimmt durch

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_x^2 \left(\frac{R_{ges} \kappa}{nA} \right)^2 + \sigma_\kappa^2 \left(\frac{R_{ges} x}{nA} \right)^2} \quad (4.2.2)$$

Es werden dafür die Windungszahl n , die Widerstände, also auch R_{ges} , und der Radius r , damit also auch die Fläche A als fehlerfrei angenommen. Die Messwerte der Hallsonde sind in Gauss angegeben, mit einem Fehler von $\pm 0,05$ Gauss, was bei der Umrechnung in Tesla zu einem Fehler von $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ T führt. Dazu kommt, dass die Hallsonde auch bei nicht eingeschaltetem Feld bereits einen Wert angezeigt hat. Dieser Wert war nicht konstant, wurde aber mit einem Fehlerbereich für die Schwankungen für jede Messreihe bestimmt.

In Abbildung 4 sieht man, dass die zwei Messwerte der Induktionsspule zwar nahe an einander liegen, aber besonders außerhalb der Spule stärker voneinander abweichen. Mit der Betrachtung der Theoriekurve ist anzunehmen, dass die Hallsonde zuverlässigere Messwerte liefert.

In Abbildung 5 wurde nun aus den Messungen des magnetischen Feldes für beide Luftspulen mit der Hallsonde die magnetische Feldstärke aufgetragen gegen die Position,

mit den jeweils theoretisch erwarteten Kurven. Die magnetische Feldstärke wurde dabei

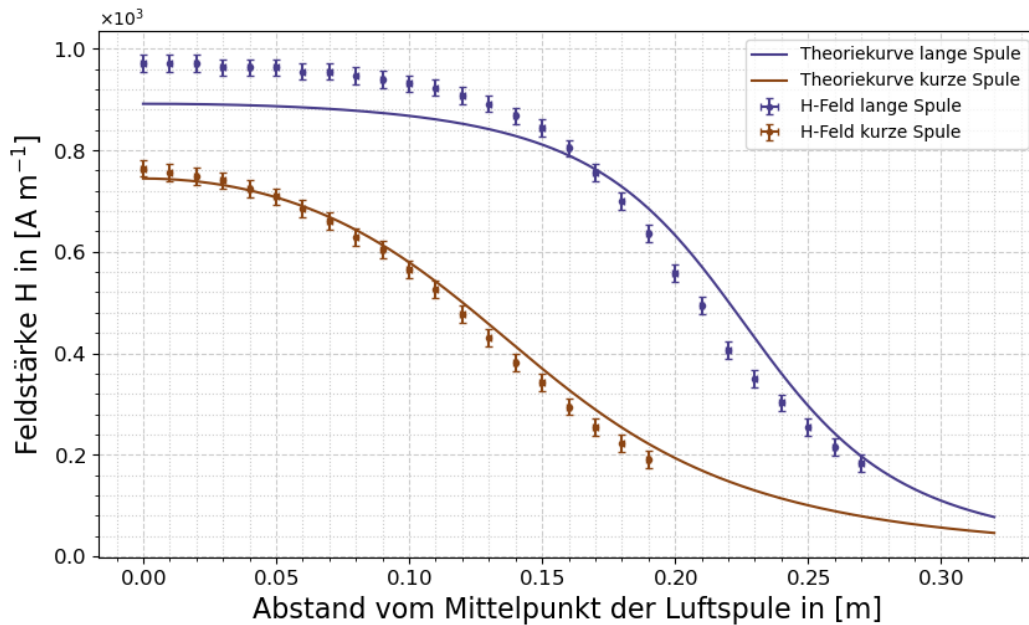


Abbildung 5: Messpunkte der magnetischen Felder durch die Hallsonde, für die kurze und lange Luftspule mit Theoriekurven durch Gleichung 2.1.2

aus den Messungen der Hallsonde mit Gleichung 2.0.1 bestimmt. Es ergibt sich aus der Ungenauigkeit des Startwertes und dem Fehler durch die Skala nach der Umrechnung ein Fehler von $\pm 17 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ für die Feldstärke.

Die theoretischen Kurven wurden bestimmt nach Gleichung 2.1.2, wobei zu beachten ist, dass a hier den Abstand vom Rand der Spule bezeichnet, aber bei den Messwerten der Abstand zur Spulenmitte betrachtet wurde.

Betrachtet man nun die Werte, welche durch Gleichung 2.1.1 bestimmt werden können, erhält man für die lange Spule den Wert $H_l = \frac{nI}{l} = (927 \pm 107) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und für die kurze Spule $(930 \pm 106) \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Der Fehler wurde dabei nach Gleichung 6.3.4 bestimmt² mit $\sigma_H = \sqrt{\sigma_I^2 \cdot \left(\frac{n}{l}\right)^2}$, wobei die Windungszahl und Länge der Spulen wieder als fehlerfrei angenommen wurde.

²Der Fehler für I ist nach Herstellerangaben $\pm(1,5\% \text{ des Messwertes} + 5\text{Skalenteile})$, und wurde damit auf $\pm 0,0575 \text{ A}$ bestimmt.

4.3 Magnetfeld der Helmholtzspule

In Abbildung 6 sind die magnetischen Flussdichten der zwei Luftspulen und der Helmholtzspule als Messpunkte eingezeichnet. Dabei wurden zum besseren Vergleich der Messreihen sowohl die magnetische Flussdichte als auch der Abstand der Messung vom Mittelpunkt normiert. Für die Normierung der Flussdichte wurde dabei die Flussdichte jedes Messpunktes geteilt durch die maximale Flussdichte dieser Messreihe, und der Abstand wurde normiert durch Teilen des Messwerts durch die halbe Länge der jeweiligen Spule, bzw. den halben Abstand bei der Helmholtzspule.

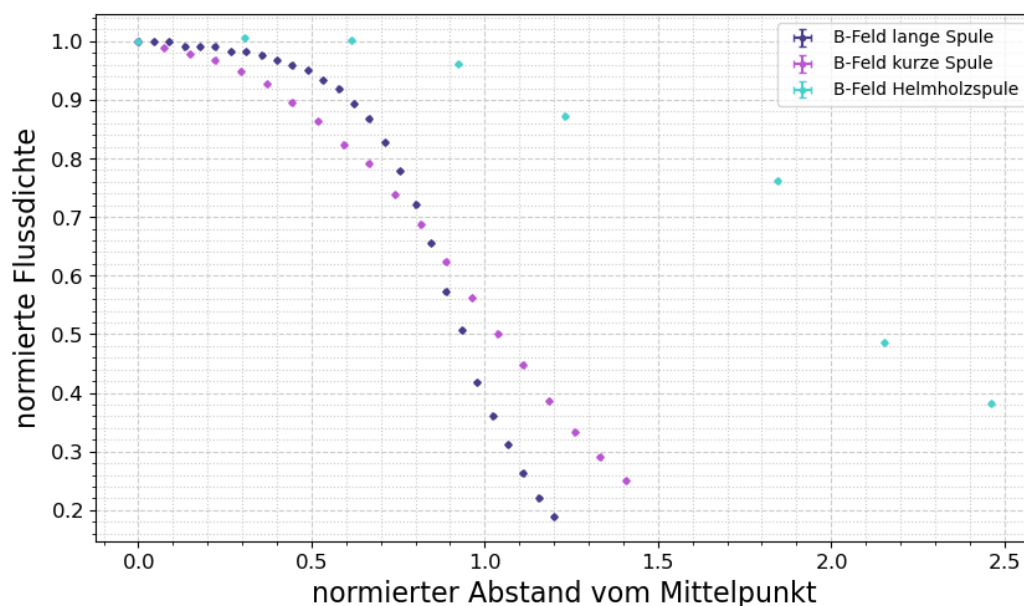


Abbildung 6: Magnetische Flussdichte der langen und kurzen Luftspule und der Helmholtzspule, gemessen mit der Hallsonde

Nach Gleichung 2.1.3 sollte die magnetische Flussdichte der Helmholtzspule $(0,0034 \pm 0,0004)$ T betragen. Der tatsächliche Messwert der Hallsonde ist $(0,00370 \pm 0,00003)$ T.

4.4 Induktionskonstante μ_0

Um μ_0 zu bestimmen, werden die Messwerte der magnetischen Flussdichte durch die Hallsonde und die Induktionsspule von allen Spulen durch die entsprechende magnetische Feldstärke geteilt. Für die Luftspulen wird dafür Gleichung 2.1.2 verwendet und für die Helmholtzspule Gleichung 2.1.5. Mit dieser Methode erhält man für jeden gemessenen Abstand bei jeder Spule einen Wert für μ_0 , woraus dann der gewichtete Mittelwert nach Gleichung 6.3.1 bestimmt werden kann. Die Fehler von μ_0 werden mittels Gleichung 6.3.4 bestimmt, nähere Erklärung zum Fehler und der Bestimmung von μ_0 ist im Anhang in Unterabschnitt 6.2 zu finden.

Für den gewichteten Mittelwert aus allen Messungen ergibt sich ein Wert von $\mu_0 = (3,19 \pm 0,18) \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$. Wie in Unterabschnitt 6.2 erklärt wird, ist es hier relevant auch den gewichteten Mittelwert für μ_0 ohne die Messungen an der Helmholtzspule und die der langen Spule mit der Induktionsspule anzugeben, welcher den Wert $\mu_0 = (1,21 \pm 0,10) \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$ gibt.

Für die Berechnung der magnetischen Feldstärke werden dabei sowohl für die Helmholtzspule als auch für die Luftspulen die Werte für Länge, Windungszahl, Radius und Abstand als fehlerfrei angenommen. Damit ist die einzige fehlerbehaftete Größe die Stromstärke. Für diese wird der selbe Fehler wie in Unterabschnitt 4.2 verwendet. Die Fehler von H lassen sich somit für die Helmholtzspule berechnen durch

$$\sigma_H = \sqrt{\sigma_I^2 \left(\frac{nR^2}{2} \left(\left(R^2 + \left(a - \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(R^2 + \left(a + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} \right) \right)^2} \quad (4.4.1)$$

und für die anderen Spulen durch

$$\sigma_H = \sqrt{\sigma_I^2 \left(\frac{n}{2l} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{R^2 + (l-a)^2}} \right) \right)^2} \quad (4.4.2)$$

Die Fehler für die magnetischen Flussdichten werden aus Unterabschnitt 4.3 übernommen, damit ist der Fehler von μ_0 durch Gleichung 6.3.4 berechnet nach³

$$\sigma_{\mu_0} = \sqrt{\sigma_H^2 \left(\frac{B}{H^2} \right)^2 + \sigma_B^2 \left(\frac{1}{H} \right)^2} \quad (4.4.3)$$

³Alle diese Rechnungen wurden mit Python durchgeführt, um Rundungsfehler wo möglich zu vermeiden.

5 Diskussion

In Abbildung 4 ist leicht zu erkennen, dass die mit der Induktionsspule gemessenen Werte besonders außerhalb der Spule stark voneinander abweichen. Dabei überschneiden sich bei den meisten Werten nicht einmal mehr die Fehlerintervalle der Punkte. Daraus geht hervor, dass diese Methode des Messens unzuverlässiger ist, als die Messung mit der Hallsonde. In der Abbildung ist zum Vergleich zusätzlich die theoretisch erwartete Kurve eingetragen, wobei die Werte beider Methoden augenscheinlich von den theoretischen Werten abweichen. Es ist jedoch zu erkennen, dass der Verlauf der Messungen mit der Hallsonde in seiner Form dem Verlauf der Theoriekurve stärker ähnelt, als die Messungen durch die Induktionsspule.

Betrachtet man nun die Feldstärken dargestellt in Abbildung 5 erkennt man, dass fast alle Punkte der Messreihe der kurzen Luftspule innerhalb des $1\text{-}\sigma$ -Intervalls der theoretisch erwarteten Kurve liegen. Bei den Messpunkten der langen Spule ist wie zuvor die Form der Kurve offensichtlich nahezu gleich, jedoch scheint diese leicht verschoben zu sein in positive y-Richtung und negative x-Richtung. Ein möglicher Grund ist die hierbei verwendete Hallsonde, welche auch ohne Magnetfeld einen sich ständig ändernden Wert anzeigte. Um Fehler dadurch zu vermeiden wurde für jede Messreihe der Startwert notiert und ein Nullabgleich durchgeführt. Dieser Startwert schwankte jedoch zwischen zwei verschiedenen Messreihen um etwa 10 Gauss.

Die nach Gleichung 2.1.1 bestimmte Feldstärke der langen Spule liegt mit $H_l = (927 \pm 107) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum gemessenen Wert $(971 \pm 17) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ in der Mitte der Spule. Bei zunehmender Distanz zum Mittelpunkt verringert sich der gemessene Betrag der Feldstärke, wie erwartet, im Vergleich zu dem berechneten Wert. Andersherum ergibt sich ein $3\text{-}\sigma$ -Intervall. Für die kurze Spule ergibt sich ein $2\text{-}\sigma$ -Intervall von $H_k = (930 \pm 106) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ in der Mitte der Spule zum gemessenen Wert von $(764 \pm 17) \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Auch hier entfernt sich der Wert danach wie erwartet von den Messwerten. Andersherum ergibt sich hier ein $10\text{-}\sigma$ -Intervall.

In Abbildung 6 ist zu sehen, dass für das Magnetfeld der Helmholtzspule erst kurz vor Verlassen des Bereichs zwischen dem Spulenpaar die Flussdichte nicht mehr linear und konstant ist und somit die Homogenität des Feldes abnimmt. Bei den anderen beiden Spulen ist bereits knapp hinter dem Mittelpunkt der Spulen bei weniger als 0,5 der normierten Länge eine deutliche Abnahme der Flussdichte zu erkennen. In dieser Grafik ist der Unterschied in der Stärke der Magnetfelder nicht zu erkennen. Anhand der Messwerte ist jedoch leicht zu sehen, dass das Magnetfeld der Helmholtzspulen mit einem Wert von $(0,00370 \pm 0,00003) \text{ T}$ in der Mitte der Spulen etwa das dreifache des Wertes der langen Spule mit $(0,00122 \pm 0,00003) \text{ T}$ und fast das vierfache des Wertes der kurzen Spule mit $(0,00096 \pm 0,00003) \text{ T}$ beträgt. Damit ist das Magnetfeld der Helmholtzspule sowohl deutlich homogener als auch stärker im Vergleich zu den Feldern der anderen beiden Spulen. Dabei ist zu beachten, dass die gesamte Windungszahl der Helmholtzspule

etwa doppelt so viel beträgt wie die Windungszahl der kurzen Luftspule. Hierdurch lässt sich der Faktor vier der Feldstärke der kurzen Luftspule im Vergleich zum Faktor drei der langen Luftspule mit einer ähnlichen Windungszahl wie die der Helmholtzspule erklären.

Beim Bestimmen des Wertes von μ_0 wurden alle Messreihen verwendet, dabei ist auffällig, dass zwei Messreihen deutlich bessere Ergebnisse liefern als die anderen. Dies ist genauer in Tabelle 1 dargestellt. Der durch die Messreihe der kurzen Spule bestimmte Wert liegt mit $(1,21 \pm 0,15) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert, welcher $\mu_0 = (4\pi \cdot 10^{-7}) \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \approx (1,256 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ beträgt. Auch der Wert der Messreihe der langen Spule durch die Hallsonde liegt mit $(1,21 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall. Dagegen ist der durch die Induktionsspule bestimmte Wert mit $(0,80 \pm 0,007) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ in einem $7\text{-}\sigma$ -Intervall. Der Messwert im Mittelpunkt gemessen mit der Induktionsspule liegt mit $(1,17 \pm 0,03) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretischen Wert. Es ist aber zu erkennen, dass die Werte sich weiter vom theoretischen Wert entfernen, je weiter weg vom Spulenmittelpunkt gemessen wurde. Auch der aus der Messung der Helmholtzspule bestimmte Wert liegt mit $(4,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ in einem $7\text{-}\sigma$ -Intervall. Es ist auch wieder der Fall, dass die Messungen sich außerhalb des Spulenpaares weiter vom theoretischen Wert entfernen. Damit ist der gewichtete Mittelwert aller Messungen mit $(3,19 \pm 0,18) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ hier nur bedingt aussagekräftig, mit einem $11\text{-}\sigma$ -Intervall. Es ist allerdings anzunehmen, dass die Werte aus den Messungen der langen und kurzen Spule durch die Hallsonde genauer sind als die der anderen beiden Messungen, auf Grund der Anzahl der genommenen Messwerte und des weniger starken Abweichens der einzelnen Werte voneinander. Der gewichtete Mittelwert nur dieser Messungen ist $(1,21 \pm 0,10) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ und liegt somit in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall. Für die Messung mit der Induktionsspule war es nur schwer möglich diese mittig in der Luftspule zu halten, es ist also anzunehmen, dass aus diesem Grund bei dieser Messung stärkere Abweichungen entstehen. Auch bei der Helmholtzspule war es auf Grund der vergleichsweise kleinen Länge, auf der gemessen wurde, und dem Aufbau des Spulenpaares nicht trivial die Messungen akkurat durchzuführen, was auch hier auf stärkere Abweichungen schließen lässt.

Es wäre hilfreich gewesen Maßstäbe an allen Spulen, nicht nur der Induktionsspule, anzubringen zum besseren Abschätzen und Ablesen der Messpunkte.

6 Anhang

6.1 Formel zur Bestimmung der Eichkonstanten κ

Im Allgemeinen gilt für die Eichkonstante $\kappa = \frac{Q}{x} \frac{It}{Rx}$. Hier ist zu beachten, dass nicht der gesamte Strom der Schaltung durch den Integrator fließt. Es gilt insgesamt für den Spannungsabfall

$$U_{ges} = R_i I_i + R_1 I_{ges} \quad (6.1.1)$$

wobei R_i der Widerstand des Stromintegrators ist, und I_i der Strom durch diesen. R_1 bezeichnet dabei den $1\text{ k}\Omega$ Widerstand, und im folgenden ist R_2 der $3,3\text{ }\Omega$ Widerstand. Für den gesamten Strom gilt $I_{ges} = \frac{U}{R_{ges}}$, wobei sich R_{ges} bestimmen lässt durch

$$R_{ges} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}} \quad (6.1.2)$$

Stellt man nun Gleichung 6.1.1 nach I_i um und setzt diese zusammen mit dem Gesamtwiderstand und dem Gesamtstrom in die allgemeine Formel für die Eichkonstante ein, so erhält man die Gleichung zur Bestimmung der Eichkonstante für den Fall in Abbildung 3:

$$\kappa = \frac{Ut}{R_i x} - \frac{R_1 Ut}{R_{ges} R_i x} \quad (6.1.3)$$

6.2 Genauere Betrachtung der Berechnung von μ_0

In Tabelle 1 sind alle bestimmten Werte für μ_0 aus den Messungen mit der Induktionsspule und der Hallsonde zusammengefasst. Dabei finden sich die Werte in dieser Reihenfolge: die der langen Spule bestimmt mit der Induktionsspule, und mit der Hallsonde, dann die Werte der kurzen Spule bestimmt mit der Hallsonde und zuletzt die der Helmholtzspule. An den gewichteten Mittelwerten ist zu sehen, dass die Werte von der langen und kurzen Spule bestimmt mit den Daten aus der Messung mit der Hallsonde im $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum erwarteten Wert von $1,256 \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$, wohingegen die Werte bestimmt aus der Messung der langen Spule mit der Induktionsspule und der Helmholtzspule mit der Hallsonde in einem $7\text{-}\sigma$ -Intervall liegen.

	Induktionsspule	lange Spule	kurze Spule	Helmholtzspule
μ_0	$1,17 \pm 0,03$	$1,37 \pm 0,03$	$1,29 \pm 0,16$	$2.2 \pm 0,3$
	$1,17 \pm 0,03$	$1,37 \pm 0,03$	$1,28 \pm 0,15$	$2.7 \pm 0,4$
	$1,16 \pm 0,03$	$1,37 \pm 0,03$	$1,27 \pm 0,15$	$3.3 \pm 0,4$
	$1,17 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,27 \pm 0,15$	$4.0 \pm 0,5$
	$1,17 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,26 \pm 0,15$	$4.5 \pm 0,6$
	$1,14 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,26 \pm 0,15$	$6.0 \pm 0,7$
	$1,12 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,25 \pm 0,15$	$4.7 \pm 0,6$
	$1,11 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,24 \pm 0,15$	$4.4 \pm 0,6$
	$1,10 \pm 0,03$	$1,36 \pm 0,03$	$1,23 \pm 0,15$	
	$1,06 \pm 0,03$	$1,35 \pm 0,03$	$1,24 \pm 0,15$	
	$1,0 \pm 0,4$	$1,35 \pm 0,03$	$1,23 \pm 0,15$	
	$0,9 \pm 0,5$	$1,35 \pm 0,03$	$1,22 \pm 0,15$	
	$0,9 \pm 0,6$	$1,34 \pm 0,03$	$1,20 \pm 0,15$	
	$0,6 \pm 0,9$	$1,33 \pm 0,03$	$1,18 \pm 0,15$	
	$0,5 \pm 1,2$	$1,32 \pm 0,03$	$1,16 \pm 0,15$	
	$0,6 \pm 2,0$	$1,31 \pm 0,03$	$1,16 \pm 0,15$	
	$0,8 \pm 3$	$1,28 \pm 0,03$	$1,13 \pm 0,15$	
		$1,25 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,15$	
		$1,21 \pm 0,03$	$1,10 \pm 0,16$	
		$1,17 \pm 0,04$	$1,08 \pm 0,16$	
		$1,11 \pm 0,04$		
		$1,09 \pm 0,04$		
		$1,02 \pm 0,05$		
		$1,02 \pm 0,05$		
		$1,06 \pm 0,06$		
		$1,08 \pm 0,08$		
		$1,12 \pm 0,09$		
		$1,16 \pm 0,11$		
gew. mittelwert	$0,80 \pm 0,07$	$1.21 \pm 0,04$	$1.21 \pm 0,15$	$4.3 \pm 0,5$

Tabelle 1: Durch die Messungen bestimmte Werte für μ_0 für jede Spule in jedem Abstand, mit Fehler nach Gleichung 6.3.4, und gewichtetem Mittelwert mit zugehörigem Fehler nach Gleichung 6.3.1 und Gleichung 6.3.2, alle Werte sind in 10^{-6} N A^{-2} angegeben

6.3 Fehlerformeln

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.3.1)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.3.2)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen. Der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, zieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Variationen beim Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.3.3)$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right)^2 + \left(\sigma_B \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right)^2} \quad (6.3.4)$$

Literatur

- [1] Lehrportal Uni Göttingen, 2020. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4622>, last access: 25.06.23.
- [2] Lehrportal Uni Göttingen. Praktikum zu Experimentalphysik II: 14 - Magnetfelder von Spulen, 2020. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>, last access: 24.06.23.
- [3] Oskar Höfling. *Physik Band 2 Teil 2*. Ferd. Dummlers Verlag, 12. auflage edition, 1980.
- [4] Wilfried Kuhn. Georg Westermann Verlag, 1974.
- [5] Gerhard Steiner Paul Wagner, Georg Reischl. *Einführung in die Physik*. Facultas Verlags- und Buchhandel AG, 4. edition, 2020.

Abbildungsverzeichnis

1	Funktionsweise einer Hallsonde, [1]	5
2	Versuchsaufbau mit benötigtem Material, [2]	6
3	Schaltplan für die Messungen, sowie Anbau zum Kalibrieren des Stromintegrators, [2], Veränderungen durch Autor	6
4	Magnetfeldmessung der langen Luftspule mit Induktionsspule und Hallsonde, sowie eine Theoriekurve zum Vergleich	8
5	Messpunkte der magnetischen Felder durch die Hallsonde, für die kurze und lange Luftspule mit Theoriekurven durch Gleichung 2.1.2	9
6	Magnetische Flussdichte der langen und kurzen Luftspule und der Helmholtzspule, gemessen mit der Hallsonde	10