

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 22
Das Prismen- und Gitterspektrometer

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 09.01.2024

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Grundbegriffe	4
2.2	Das Prismenspektrometer	4
2.2.1	Brechungsindex des Prismas	4
2.2.2	Auflösung des Prismas	5
2.3	Das Gitterspektrometer	6
3	Durchführung	7
3.1	Aufbau	7
3.2	Prismenspektrometer	7
3.3	Gitterspektrometer	8
4	Auswertung	9
4.1	Auswertung des Prismenspektrometers	9
4.2	Auswertung des Gitterspektrometers	11
5	Diskussion	13
5.1	Prismenspektrometer	13
5.2	Gitterspektrometer	13
5.3	Vergleich der Spektrometer	14
6	Anhang	15
6.1	Messdaten	15
6.2	Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression	16
	Literatur	18

1 Einleitung

In der Astrospektroskopie kann die Zusammensetzung der Atmosphären von Exoplaneten oder fern gelegenen Sternen, aber auch der Gaswolken und fernen Galaxien bestimmt werden, indem Licht in seine Spektralfarben aufgespalten wird.

Wenn Photonen auf Atome treffen, nehmen diese die gequantelte Energie unter Umständen auf und werden auf ein höheres Energieniveau gehoben. Da sie zurück in einen energetisch günstigen Zustand gelangen wollen, fallen die Atome wieder auf ihr ursprüngliches Energieniveau herab und emittieren dabei Licht, das charakteristisch für die Kernladungszahl jedes Atoms ist.

Wenn nun Licht von einem Exoplaneten in ein Teleskop auf oder bei der Erde trifft und in sein Spektrum zerlegt wird, kann man herausfinden, welche Wellenlängen dieses Licht enthält und damit, welche Atome in der Atmosphäre dieses Licht angeregt haben müssen. Das gibt wiederum Rückschlüsse auf die Zusammensetzung der Atmosphäre.

Auch in anderen Teilen der Experimentalphysik kommt die Spektralanalyse zum Einsatz. Aus diesem Grund ist es wichtig, diese zu verstehen. Die Zerlegung von weißem Licht in seine Spektralfarben durch ein Lichtspalt und ein Prisma wurde erstmals von Sir Isaac Newton nachgewiesen und ist eines seiner berühmtesten Experimente. Dieses wird in diesem Versuch nachgestellt.

2 Theorie

2.1 Grundbegriffe

Licht wird in sein Spektrum zerlegt, wenn es von einem dispersionslosen Medium in eines mit Dispersion übergeht und an der Grenzfläche bricht oder umgekehrt. Dispersion ist die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung – hier eben Licht – der Frequenz und damit auch der Wellenlänge. Dabei gilt:

Die Dispersion heißt *anormal*, wenn die Brechung stärker ist, je höher die Wellenlänge. Also wird rotes Licht stärker gebrochen als blaues Licht, in Formeln ausgedrückt gibt das:

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0. \quad (2.1.1)$$

Beim *normalen* Fall wird Brechung mit wachsender Wellenlänge geringer. Also wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes, in Formeln:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad (2.1.2)$$

[3, vgl. S. 26].

2.2 Das Prismenspektrometer

2.2.1 Brechungsindex des Prismas

An beiden Grenzflächen des Prismas zum umgebenden Medium, den *brechenden Flächen*, wird das Licht nach dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz gebrochen.

Die sogenannte symmetrische Durchstrahlung eines Prismas tritt auf, wenn der Einfallswinkel θ_{e1} gleich dem Austrittswinkel θ_{t2} ist, beide Winkel sind in Abbildung 2.1 eingezeichnet. Für diesen Fall wird der Ablenkwinkel δ minimal, also ist der Zusammenhang $\delta = \delta_{\min}$ erfüllt. Dann gilt die FRAUNHOFER-Formel, die aus dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz direkt abgeleitet werden kann, aus [3, S. 78] mit

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (2.2.1)$$

mit dem brechenden Winkel α , der eine Objekteigenschaft des Prismas und auch in Abbildung 2.1 eingezeichnet ist.

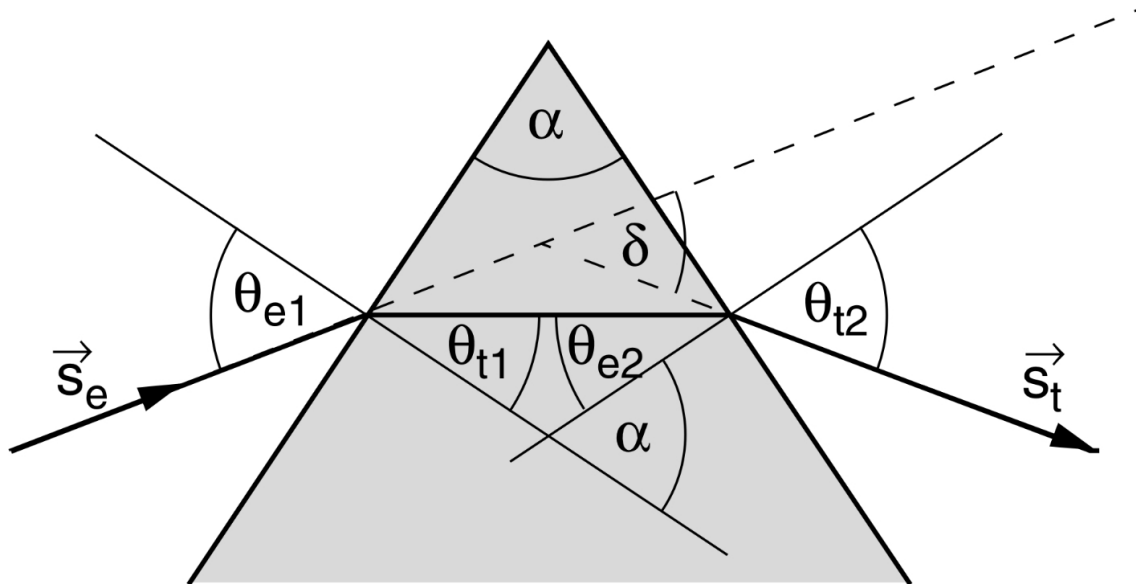


Abbildung 2.1: Strahlengang des Versuchs; α ist der brechende Winkel, δ der Ablenkwinkel. θ_{e1} und θ_{t2} sind Eintritt- und Austrittswinkel; die anderen eingezeichneten Größen in der Skizze werden nicht benötigt; Grafik aus [3, S. 77]

2.2.2 Auflösung des Prismas

Die Qualität eines Spektrometers, Licht mit zwei dicht benachbarten Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ aufzulösen, also das entstehende Licht mit Wellenlänge λ gerade so von dem Licht mit der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ unterscheiden zu können, wird durch das Auflösungsvermögen A angegeben. Dieses ist dann über

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (2.2.2)$$

definiert. Zur Berechnung führt man die effektive Basislänge a eines Dreiecks, dessen Höhe sich durch das vom Licht durchsetzte Volumen im Prisma ergibt, während die effektive Basislänge parallel zu der Basiskante des Prismas verläuft, und die Breite des einfallenden Lichtbündels b ein. Da sich der brechende Winkel α des Prismas auch auf das

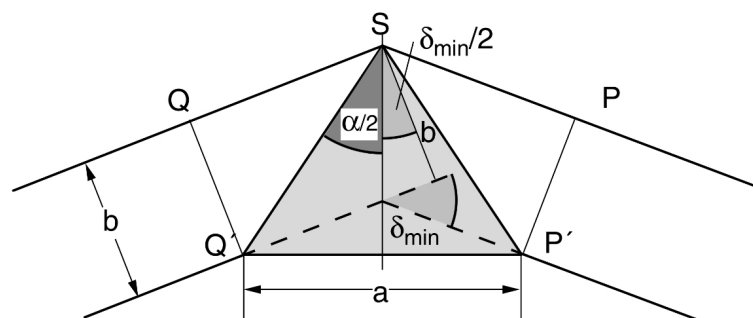


Abbildung 2.2: Skizze zum Dreieck mit effektiver Basislänge zur Bestimmung des Auflösungsvermögens, Grafik aus [3, S. 201]

Dreieck vererbt, kann bei gleichseitigen Prismen mit trigonometrischen Beziehungen sofort abgeleitet werden, dass sich die effektive Basislänge durch

$$a = \frac{b}{\cos\left(\frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}\right)} \quad (2.2.3)$$

berechnen lässt, was in Abbildung 2.2 noch einmal nachvollzogen werden kann.

Wenn die maximale Breite des Lichtbündels b_{\max} die einzige Begrenzung der Bündelbreite b ist, wird der Lichtstrahl gebeugt. Nach dem RAYLEIGH-Kriterium sind zwei Spektrallinien noch genau dann unterscheidbar, wenn sie sich bei symmetrischem Strahlengang „in δ_{\min} zwischen Beugungsmaximum und ersten Minimum unterscheiden“ [3, S. 201].

Daraus resultiert dann die Auflösung eines Prismenspektrometers nach [ebd., S. 201] mit

$$A_{\text{Prisma}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left| a \cdot \frac{n}{\lambda} \right|. \quad (2.2.4)$$

2.3 Das Gitterspektrometer

Ein Gitterspektrometer ist eine Glasscheibe, durch die feine Spalten gezogen sind, die beim einfallenden Licht Interferenz erzeugen. Im Gegensatz zu dem Prisma wird die Spektralzerlegung also durch Interferenz und nicht durch Lichtbrechung verursacht. Die Feinheit des Gitters wird durch die Gitterkonstante a angegeben. Sie ist die reziproke Längendichte an Spaltöffnungen im Gitter. $1/a$ gibt also die Zahl der Spalten pro Längeneinheit an.

Das Interferenzmuster hat mehrere Hauptmaxima, deren Position – also die Differenz des Winkels θ des Lichts mit zerlegter Wellenlänge zur optischen Achse zum Auftreffwinkels θ_0 – von der Wellenlänge des Lichtes λ nach der Formel

$$a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = \pm \frac{n\lambda}{a} \quad (2.3.1)$$

aus [3, S. 163] abhängig ist. Dabei bezeichnet n die Ordnung des Maximums. Das 0-te Maximum befindet sich auf der optischen Achse. Die Ordnung zählt einfach die Maxima von der optischen Achse.

Die Auflösung A eines Gitterspektrometers ist nach [3, S. 165]

$$A_{\text{Gitter}} = nN \quad (2.3.2)$$

mit N als der Anzahl der beleuchteten Spalten. Dabei befinden sich $N - 2$ Nebenmaxima zwischen zwei Hauptmaxima.

3 Durchführung

3.1 Aufbau

In diesem Versuch wird mit einem Spektrometer das Lichtspektrum einer Quecksilber-Lampe betrachtet.

Es wird das Auflösungsvermögen eines Prismenspektrometers mit dem eines Gitterspektrometers verglichen. Dabei wird für beide Messungen dasselbe Spektrometer verwendet, zu sehen in Abbildung 3.1. Im ersten Versuchsteil wird dafür das Prisma, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, auf den Tisch des Spektrometers gestellt. Im zweiten Versuchsteil wird an dieser Stelle stattdessen das Gitter eingestellt. Vor beiden Versuchsteilen ist das Spektrometer zu justieren. Dafür wird der optische Spalt vollständig geöffnet und nur der Spalt des Spaltrohrs verwendet. Die

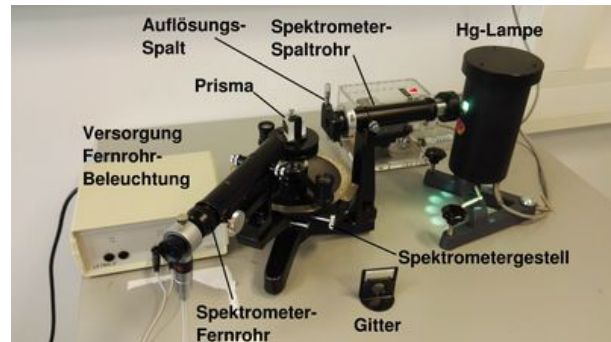


Abbildung 3.1: Versuchsaufbau des Experiments mit Spektrometer, Gitter und Prisma aus [1]

Spektrallampe wird in die optische Achse des Spaltrohrs gestellt und das Fernrohr wird auf das Spaltrohr gerichtet. Der Spalt wird nun leicht verbreitert und eine geeignete Spalthöhe ist einzustellen. Die Höhe wird dann mittig zum Horizontalfaden des Fadenkreuzes ausgerichtet und fixiert. Der Spalttubus wird entlang der Achse verschoben, bis dieser scharf abgebildet wird. Zuletzt wird der Spalt vertikal ausgerichtet durch Drehen des Tubus, bis der Spalt parallel zum Vertikalfaden des Fadenkreuzes ist.

Zum Ablesen der Werte bei den Messungen verfügt das Spektrometer über ein drehbares Okular mit einem Nonius, anhand dessen der Winkel zur optischen Achse abgelesen werden kann.

3.2 Prismenspektrometer

Nach dem Justieren des Spektrometers muss noch die Position des Prismentisches zum Fernrohr eingestellt werden. Dafür wird das Prisma auf dem Prismentisch befestigt und dann der Prismentisch gedreht, bis das reflektierte Bild im Fernrohr sichtbar und zentriert ist. Nun wird der Prismentisch gedreht um das Bild des Spalts an einer anderen Seite des Prismas zu reflektieren. Es ist mit Hilfe der Nivellierschrauben das Bild wieder zu zentrieren. Dies wird so oft wiederholt, bis keine vertikale Verschiebung des Bildes mehr auftritt.

Für die Messungen ist nun der minimale Ablenkungswinkel durch Drehen des Prismas zu betrachten. Es sind damit die Ablenkungswinkel der gelben Linie zu messen. Anschlie-

ßend wird die Differenz des Ablenkungswinkels der grünen Linie zur eben gemessenen gelben Linie bestimmt.

Als letztes ist durch Verengen des Auflösungsspalts der Bündelquerschnitt zu verringern, bis die beiden gelben Linien gerade noch getrennt zu erkennen sind. Die Einstellung des Spalts zu diesem Punkt ist zu notieren sowie die Einstellung bei geschlossenem Spalt.

3.3 Gitterspektrometer

Das Spektrometer ist wieder zu justieren, bevor die Messungen durchgeführt werden. Anschließend wird das Gitter auf dem Prismentisch aufgestellt anstelle des Prismas. Es ist darauf zu achten, dass das Gitter senkrecht zum Strahlengang steht.

Es ist der Ablenkungswinkel der gelben, grünen und violetten Linie für die erste und zweite Ordnung zu bestimmen.

Analog wie beim Prisma ist nun der Bündelquerschnitt zu verringern, in diesem Fall jedoch bis die Linien gerade so nicht mehr getrennt aufgelöst werden, und die Position des Spalts ist zu notieren. Dies ist auch für erste und zweite Ordnung zu tun.

4 Auswertung

4.1 Auswertung des Prismenspektrometers

Es kann nach Gleichung 2.2.1 der Brechungsindex des Prismas bei den betrachteten Spektrallinien bestimmt werden. Dabei ist δ_{min} bereits der abgelesene Winkel der Messung, da der Aufbau auf den minimalen Ablenkungswinkel einzustellen war. Für die Fehler der jeweiligen Brechungsindizes ergibt sich dann nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5

$$\sigma_n = \sigma_{\delta_{min}} \frac{\cos\left(\frac{\delta_{min} + \alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (4.1.1)$$

dabei ist α als fehlerfrei angenommen, da das Prisma nach Herstellerangaben gleichseitig ist. Auf dem kleinen Wellenlängenbereich der Messung kann nun angenommen werden, dass die Dispersion linear ist. Somit lässt sich diese berechnen nach

$$D = \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (4.1.2)$$

mit dem Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_{n_1}^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^2 + \sigma_{n_2}^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^2}. \quad (4.1.3)$$

Die Wellenlängen der hier betrachteten grünen und gelben Spektrallinien sind in Tabelle 1 zu finden. Damit ergibt sich eine Dispersion von $D = (-164 \pm 4) \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$. Die Dispersion kann auch anhand der Herstellerangaben zum Prisma bestimmt werden. für Wellenlängen zwischen 486,1 nm und 589,3 nm ist dabei $\Delta n = 0,017$. Dies ergibt mit derselben Linearitätsannahme eine Dispersion nach Herstellerangaben von $D_H = -164,73 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$.

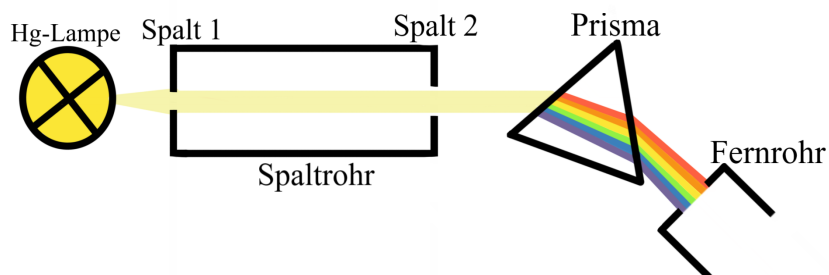


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Strahlengangs beim Prisma, eigene Arbeit

Mit Gleichung 2.2.3 kann aus der gemessenen Spaltbreite nun die effektive Basislänge bestimmt werden, dabei ist die Breite des Lichtbündels gegeben durch die Spaltbreite, was sich aus Abbildung 4.1 ergibt, da hierbei Spalt 2 verwendet wurde. Der Fehler wird nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 bestimmt, wobei der auftretende Fehler durch den Winkel δ vernachlässigt werden konnte, da dieser sich nicht auf die signifikanten Stellen auswirkt, und ergibt sich zu

$$\sigma_a = \sigma_b \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)} n. \quad (4.1.4)$$

Damit ist das Auflösungsvermögen nach Gleichung 2.2.4 berechnet $A_{exp} = 4325 \pm 25$ mit dem Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_a^2 \cdot \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + \sigma_n^2 \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2}. \quad (4.1.5)$$

Nach dem anderen Teil von Gleichung 2.2.4 kann nun ein theoretischer Wert des Auflösungsvermögens bestimmt werden, welcher $A = 274$ ist.

Stellt man diese Gleichung nun um, so kann man anhand der maximal möglichen Basislänge des Prismas die maximale Auflösung bestimmen. Das Prisma hat laut Herstellerangaben eine Seitenlänge von 33 mm. Das ergibt ein maximales Auflösungsvermögen vom $A = 2940343$, woraus dann die kleinste noch getrennt zu sehende Wellenlänge im Bereich der betrachteten Wellenlängen zu bestimmen ist mit $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{A} = 2,0 \cdot 10^{-13}$.

4.2 Auswertung des Gitterspektrometers

Als nächstes wird das Gitterspektrometer ausgewertet. Mit Gleichung 2.3.1 kann man die Gitterkonstante a berechnen. Durch vorherige Justierung des Fernrohrs auf die optische Achse beträgt der Ablenkwinkel bei 0-ter Ordnung $\theta_0 = 0^\circ$. Damit ergibt sich die Formel der Gitterkonstante zu

$$a = \frac{n \cdot \lambda}{\sin(\theta)}, \quad (4.2.1)$$

wobei $n \in \{1, 2\}$ durch die betrachteten Ordnungen. Die Wellenlängen sind in [2, S. 48] angegeben. Der Fehler ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 zu

$$\sigma_a = \sigma_\theta \cdot \frac{n\lambda \cdot \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}. \quad (4.2.2)$$

Die Ergebnisse sind für jede Ordnung und betrachtete Wellenlänge in Tabelle 1 angegeben.

Ordnung	$\lambda_{\text{violett}} = 404,66 \text{ nm}$	$\lambda_{\text{grün}} = 546,07 \text{ nm}$	$\lambda_{\text{gelb}} = 576,96 \text{ nm}$
1	$(1933,08 \pm 0,25) \text{ nm}$	$(1815,961 \pm 0,019) \text{ nm}$	$(1818,3 \pm 0,7) \text{ nm}$
2	$(1751,75 \pm 0,18) \text{ nm}$	$(1710,36 \pm 0,08) \text{ nm}$	$(1702,62 \pm 0,05) \text{ nm}$

Tabelle 1: aus Ablenkwinkeln berechnete Gitterkonstanten a ; die Wellenlängen zur Berechnung sind aus [2, S. 48]

Schließlich wurde noch der gewichtete Mittelwert nach Gleichung 6.2.2 mit seinem Fehler nach Gleichung 6.2.3 berechnet und ergibt sich zu

$$a = (1796,049 \pm 0,017) \text{ nm}.$$

Als nächstes soll das Auflösungsvermögen des Gitters ausgerechnet werden. Die Formel dazu ist aus Gleichung 2.3.2 gegeben. Die reziproke Gitterkonstante a^{-1} ist die Zahl der Spalten pro Länge. Multipliziert mit der Spaltbreite, die gleichzeitig auch die Bündelbreite S ist, erhält man damit offensichtlich die Zahl der beleuchteten Spalten N . Damit ergibt sich das Auflösungsvermögen A des Gitters zu

$$A_{\text{Gitter}} = k \cdot \frac{S}{a}. \quad (4.2.3)$$

Die Gitterkonstante ist in [2, S. 47] angegeben als $a = 1/600000$. Die Spaltbreite S ergibt sich aus der Differenz zwischen Messwert x und dem Wert bei geschlossenem Spalt x_0 , wobei die Mikrometerschraube einen Fehler von $\sigma_x = 5 \cdot 10^{-6}$ hat. Damit ergibt sich ein Fehler für die Spaltbreite von $\sigma_S = \sqrt{2} \cdot \sigma_x$.

Nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 6.2.5 ergibt sich ein Fehler der Gitterauflösung von

$$\sigma_A = \sigma_S \cdot \frac{S}{a}. \quad (4.2.4)$$

Für erste und zweite Ordnung bei gelbem Licht ergibt das eine Auflösung von

$$\begin{aligned} A_{\text{Gitter, 1. Ordnung}} &= 390 \pm 5, \\ A_{\text{Gitter, 2. Ordnung}} &= 432 \pm 9. \end{aligned}$$

Das theoretische Auflösungsvermögen ergibt sich durch Gleichung 2.2.2 für beide gelben Linien mit Wellenlänge $\lambda_2 = 579,07 \text{ nm}$ und $\lambda_3 = 576,96 \text{ nm}$ aus [2, S. 48] zu

$$A_{\text{theo}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \approx 274,44.$$

Das maximale Auflösungsvermögen in erster Ordnung berechnet sich auch nach Gleichung 4.2.3 mit $k = 1$ und tritt dann auf, wenn der Spalt komplett offen steht. Dafür ist die Breite in [2, S. 47] angegeben mit $d_{\text{aper}} = 1,9 \text{ cm} = 0,019 \text{ m}$. Damit ergibt sich

$$A_{\text{max, 1. Ordnung}} = 1 \cdot \frac{d_{\text{aper}}}{a} = 11400. \quad (4.2.5)$$

5 Diskussion

5.1 Prismenspektrometer

Der experimentell bestimmte Wert der Dispersion des Prismas liegt mit $D = (-164 \pm 4) \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$ in einem $1\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretisch bestimmten Wert von $D = -164,73 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$. Das experimentell bestimmte Auflösungsvermögen hingegen liegt mit $A = 4325 \pm 25$ in einem $163\text{-}\sigma$ -Intervall zum theoretisch bestimmten Wert von $A = 274$. Dieses σ -Intervall ist auf die mit der Messung verbundenen Probleme zurückzuführen: Der Wert, welcher hier zu Berechnung verwendet wurde, war die Öffnung des Spalts, bei der gerade noch die gelben Linien getrennt erscheinen. Dies ist aus vielen Gründen schwer genau durchzuführen, die Beschaffenheit des Auges sowie vorherige Anstrengung des Auges hat einen großen Einfluss darauf, wie gut man die Linien erkennen kann. Es ist also davon auszugehen, dass der Spalt noch zu weit geöffnet war, somit das Auflösungsvermögen nicht künstlich auf das theoretisch zu erwartende Auflösungsvermögen eingeschränkt war und ein deutlich zu höherer Wert bestimmt wurde.

Diese Annahme wird damit bestätigt, dass das dort bestimmte Auflösungsvermögen immer noch weit unter dem theoretisch möglichen Auflösungsvermögen von $A = 2940343$ liegt.

5.2 Gitterspektrometer

Zuerst wurde für das Gitterspektrometer die Gitterkonstante a berechnet. Dieser ist in [2, S. 47] als $a_{\text{theo}} = 1,6 \cdot 10^{-6}$ angegeben. Der berechnete Wert beträgt $a = (1796,049 \pm 0,017) \text{ nm}$. Das ergibt ein Sigma-Intervall von 7611. Der Grund hierfür ist, dass in Gleichung 4.2.1 nur der Winkel des zerlegten Lichts der jeweiligen Ordnung zur optischen Achse fehlerbehaftet ist. Dabei sind im Versuchsaufbau noch weitere Fehlerquellen, die in den Fehler der Messwerte eingehen, aber mathematisch nicht einberechnet werden können. So stellte sich zum Beispiel heraus, dass auf dem Gitter Fingerabdrücke waren, obwohl dieses nicht berührt werden darf, da es sehr empfindlich ist. Weiter kann die Quecksilberlampe über die Jahre Abweichungen im Farbton des Lichtes, das sie ausstrahlt, aufweisen. Hinzu kommt auch der menschliche Fehler, wenn das Fadenkreuz auf die Hauptmaxima des Interferenzmusters gelegt wird.

Daher muss der Fehler für den Winkel größer geschätzt werden. Bei einem abgeschätzten Fehler von 1° für θ befindet sich der gewichtete Mittelwert der Gitterkonstanten immerhin in einem $65\text{-}\sigma$ -Intervall.

Das Auflösungsvermögen, berechnet aus der Messung für gelbes Licht für die beiden ersten Ordnungen, beträgt einmal $A_{\text{Gitter, 1. Ordnung}} = 390 \pm 5$, was ein $24\text{-}\sigma$ -Intervall zum Theoriewert von $A_{\text{theo}} \approx 274,44$ impliziert. Für die zweite Ordnung ergibt der Wert $A_{\text{Gitter, 2. Ordnung}} = 432 \pm 9$ ein $18\text{-}\sigma$ -Intervall. Die Berechnung erfolgte aus Schließen des Auflösungsspalt, bis beide gelben Linien gerade nicht mehr getrennt erschienen. Die Fehlerintervalle sind klein im Vergleich zu der Erklärung in Unterabschnitt 5.1.

5.3 Vergleich der Spektrometer

Eine Qualität von Spektrometern – wie schon in Unterunterabschnitt 2.2.2 erwähnt – ist das Auflösungsvermögen.

Das maximale Auflösungsvermögen des Prismas beträgt $A_{\max, \text{Prisma}} = 2.940.343$, wobei der kleinste aufgelöste Unterschied in der Wellenlängen, die gesammelt ins Prisma einfallen, $\Delta\lambda = 200 \text{ fm}$ ist. Das maximale Auflösungsvermögen des Gitters ist $A_{\max, \text{Gitter}} = 11.400$. Damit kann man mit einem Prisma deutlich kleinere Unterschiede in den Wellenlängen wahrnehmen.

Mit dem Gitterspektrometer waren allerdings mehr Farblinien zu sehen. Das lässt sich nun allerdings schwer quantitativ erfassen, weil in der bereitgestellten Versuchsdurchführung keine Erwähnung war, dass man zur Bewertung der Spektrometer die Zahl der sichtbaren Spektrenlinien aufschreiben sollte.

In „realen“ Experimenten wie zum Beispiel die in Abschnitt 1 erwähnte Untersuchung der atmosphärischen Zusammensetzung von Exoplaneten würde man dann vermutlich technisch höher entwickelte Spektrometer beider Arten – also solche, die größer auflösen, und solche, die mehr Licht abbilden können – verwenden.

6 Anhang

6.1 Messdaten

Durchführungspunkt im Handbuch						
Prisma						
Punkt 2	Minimaler Winkel Schwenkarm gelbe Linie in °	49 Fehler 0,5/60 °	hier wurden die Linien das erste Mal ansatzweise gerade statt kreisförmig			
Punkt 3	Winkel Schwenkarm grüne Linie in °	49,5				
Punkt 4	Spaltbreite des Spaltes g in Millimetern	1,28 Fehler Skala 0,005				
	Spaltbreite bei geschlossenem Spalt in Millimetern	0,39				
Gitter						
Punkt 2	Winkel in °					
		violett	grün	gelb		
	1. Ordnung		12,08333333	17,5	18,5	
	2. Ordnung		27,51666667	39,68333333	42,66666667	
Punkt 3	Gelbe Linien gerade nicht getrennt					
		Spaltbreite des Spaltes g in Millimetern	Spaltbreite bei geschlossenem Spalt in mm			
	1. Ordnung	0,49	-0,16			
	2. Ordnung	0,2	-0,16			

Abbildung 6.1: Messdaten vom Versuchstag; eigene Darstellung

6.2 Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden): wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.2.1)$$

Gewichteter Mittelwert: wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.2.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.2.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.2.4)$$

Fehlerfortpflanzung: die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \cdot \frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 + \left(\sigma_B \cdot \frac{\partial f}{\partial B}\right)^2} \quad (6.2.5)$$

Lineare Regression: die Steigung m und der Achsenabschnitt b des linearen Fits werden – wenn benutzt – durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.2.9)$$

Literatur

- [1] J. Große-Knetter. Praktikum zu Experimentalphysik III: 22 - Prismen- und Gitterspektrometer, 2020. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/8017>, last access: 04.01.24.
- [2] Große-Knetter J. Schaaf, P. *Das Physikalische Praktikum*. Universitätsverlag Göttingen, 2023.
- [3] Zinth-U. Zinth, W. *Optik, Lichtstrahlen – Wellen – Photonen*. Oldenbourg Verlag München, 4. edition, 2013.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Strahlengang des Versuchs; α ist der brechende Winkel, δ der Ablenk- winkel. θ_{e1} und θ_{t2} sind Eintritt- und Austrittswinkel; die anderen einge- zeichneten Größen in der Skizze werden nicht benötigt; Grafik aus [3, S. 77]	5
2.2	Skizze zum Dreieck mit effektiver Basislänge zur Bestimmung des Auflö- sungsvermögens, Grafik aus [3, S. 201]	5
3.1	Versuchsaufbau des Experiments mit Spektrometer, Gitter und Prisma aus [1]	7
4.1	Schematische Darstellung des Strahlengangs beim Prisma, eigene Arbeit .	9
6.1	Messdaten vom Versuchstag; eigene Darstellung	15

Tabellenverzeichnis

1 aus Ablenkungswinkeln berechnete Gitterkonstanten a ; die Wellenlängen
zur Berechnung sind aus [2, S. 48] 11