

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

## Versuch 32

# Radioaktivität

---

Praktikant/in:

E-Mail:

Tutor:in:

Datum der Durchführung: 18.06.24

Testat:

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Auswertung</b>	<b>4</b>
2.1	Zerfallskurven . . . . .	4
2.2	Aktivierungskurven . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
3.1	Zerfallskurven . . . . .	12
3.2	Aktivierungskurven . . . . .	12
3.3	Halbwertszeiten . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>14</b>
4.1	Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression . . . . .	14
	<b>Literatur</b>	<b>16</b>

---

# 1 Einleitung

Elemente können in dem Inneren eines Sterns bis zum Element Eisen mit Kernladungszahl 25 *fusioniert* werden, da ab dieser Zahl an Protonen im Kern keine Energie bei der Fusion emittiert wird, sodass – wenn der Stern beginnt Eisen zu fusionieren – er am Ende seiner Lebenszeit einen Eisenkern besitzt, und anschließend als Supernova implodiert.

Im Gegensatz dazu wird immer weniger Energie bei *Kernspaltung* frei, je kleiner die Kernladungszahl bishin zu Eisen wird. Aus diesem Grund können für Kernspaltung nur schwere Elemente verwendet werden, während für Kernfusion nur leichte Elemente verwendet werden können

Seit geraumer Zeit wird *Kernfusion* als Lösung zu Energiegewinnung der *Kernspaltung* vorgezogen und soll diese ablösen. Allerdings entsteht zum Beispiel Geothermie, die auch als erneuerbare bzw. nachhaltige Energiegewinnung gilt, aus natürlichem radioaktiven Zerfall in tiefen Erdschichten. Auch der Atom Müll in Endlagern wird noch für viele Jahre bestehen und viele Nationen besitzen noch eine große Zahl an Kernwaffen (etwa 12.121), sodass es für viele Jahrzehnte relevant bleibt, sich mit radioaktivem Zerfall zu beschäftigen.

In diesem Versuch wird der radioaktive Zerfall von den Silberisotopen  $^{110}_{47}\text{Ag}$  und  $^{108}_{47}\text{Ag}$ , welche durch das vorherige Aufnehmen von Neutronen aus  $^{241}\text{Am}$  und  $^9\text{Be}$  radioaktiv werden, betrachtet.

---

## 2 Auswertung

### 2.1 Zerfallskurven

Es wird der Radioaktive Zerfall von den Silberisotopen  $^{110}_{47}\text{Ag}$  (im weiteren als Isotop A gekennzeichnet) und  $^{108}_{47}\text{Ag}$  (im weiteren als Isotop B bezeichnet) betrachtet. Dafür wurde für eine Aktivierungszeit des Silberplättchens von einer Minute, zwei Minuten, vier Minuten und acht Minuten die Zerfallsrate mit einem Geiger-Müller-Zählrohr gemessen. Der Fehler der Messung der Ereignisse pro Sekunde  $N$  wird berechnet nach  $\sigma_N = \sqrt{N}$ , da der radioaktive Zerfall der Poisson-Statistik unterliegt. Der Fehler der Zeit wurde abgeschätzt durch die menschliche Reaktionszeit die beim Starten der Messungen eingeht als  $\sigma_{\text{Reaktionszeit}} = 250 \text{ ms}$ , den Fehler der Stoppuhr mit  $\sigma_{\text{Stoppuhr}} = 0,5 \text{ s}$  und der Fehler des Messprogrammes, welcher als  $\sigma_{\text{Programm}} = 0,5 \text{ s}$  abgeschätzt wurde. Damit ergibt sich ein zeitlicher Gesamtfehler von  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_{\text{Reaktionszeit}}^2 + \sigma_{\text{Stoppuhr}}^2 + \sigma_{\text{Programm}}^2}$ .

Es wurde außerdem eine Messung der Nullrate, also eine Messung ohne Probe, gemacht um die Hintergrundstrahlung bestimmen zu können. Aus dieser Messung wurde mittels Python der gewichtete Mittelwert nach Gleichung 4.1.2 bestimmt. Dies ergibt einen Wert der Nullrate von  $N_0 = 0,53 \pm 0,25$ . Der Plot zu diesen Daten ist in Abbildung 2.1 zu sehen

Es ist bekannt, das die Abklingkurven die Form

$$f(t) = \begin{cases} N_A^{1\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} t} + N_B^{1\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} t} + N_0 & \text{für 1 Minute Aktivierungszeit} \\ N_A^{2\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} t} + N_B^{2\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} t} + N_0 & \text{für 2 Minuten Aktivierungszeit} \\ N_A^{4\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} t} + N_B^{4\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} t} + N_0 & \text{für 4 Minuten Aktivierungszeit} \\ N_A^{8\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_A} t} + N_B^{8\text{min}} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_B} t} + N_0 & \text{für 8 Minuten Aktivierungszeit} \\ N_0 & \text{für die Nullratenmessung} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

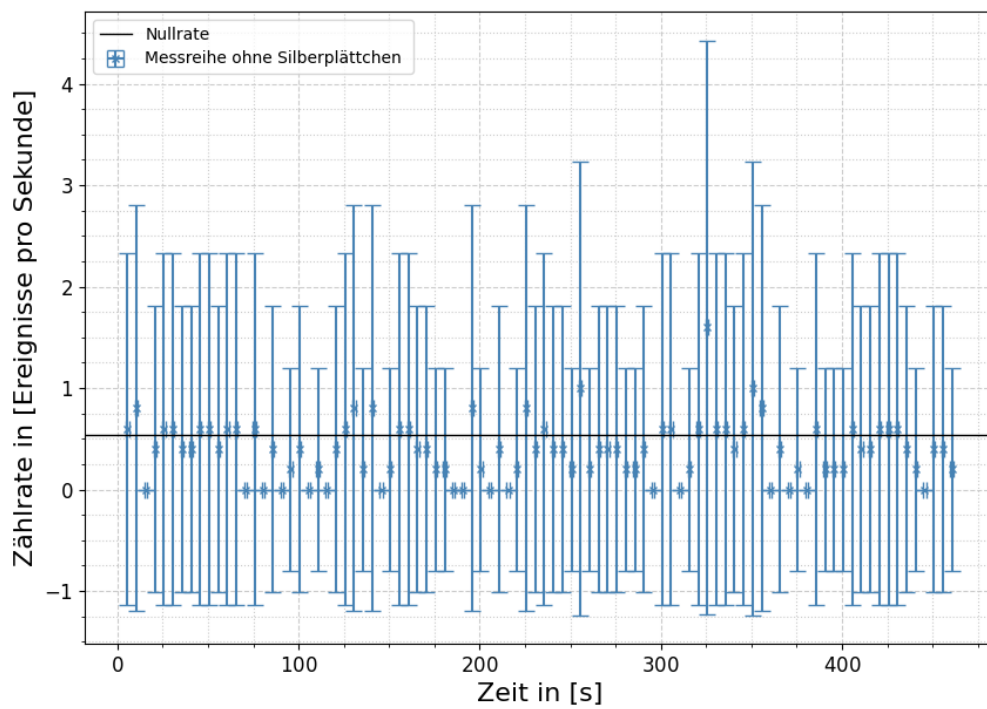
haben, mit den Anfangsaktivitäten  $N_A^{\text{min}}$  und  $N_B^{\text{min}}$ , der Nullrate  $N_0$  und den Halbwertszeiten  $T_A$  und  $T_B$ , je für Isotop A und B.

Über diese 11 Parameter wurde nun mittels Pythons optimize ein Fit basierend auf  $\chi^2$ -Minimierung erstellt, welcher in Abbildung 2.2 zu sehen ist. In Abbildung 2.3 sind die selben Daten noch einmal logarithmisch dargestellt. Nun wird zu diesem Fit das sogenannte reduzierte  $\chi^2$  bestimmt. Dafür wird zunächst  $\chi^2$  bestimmt nach

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f(t_i) - y_i)^2}{\sigma_{f(t_i)}^2 + \sigma_{y_i}^2} \quad (2.1.2)$$

und dann das reduzierte  $\chi^2$  mit

$$\chi_{\text{red}}^2 = \frac{\text{minimales } \chi^2}{\text{Anzahl der Freiheitsgrade}}. \quad (2.1.3)$$



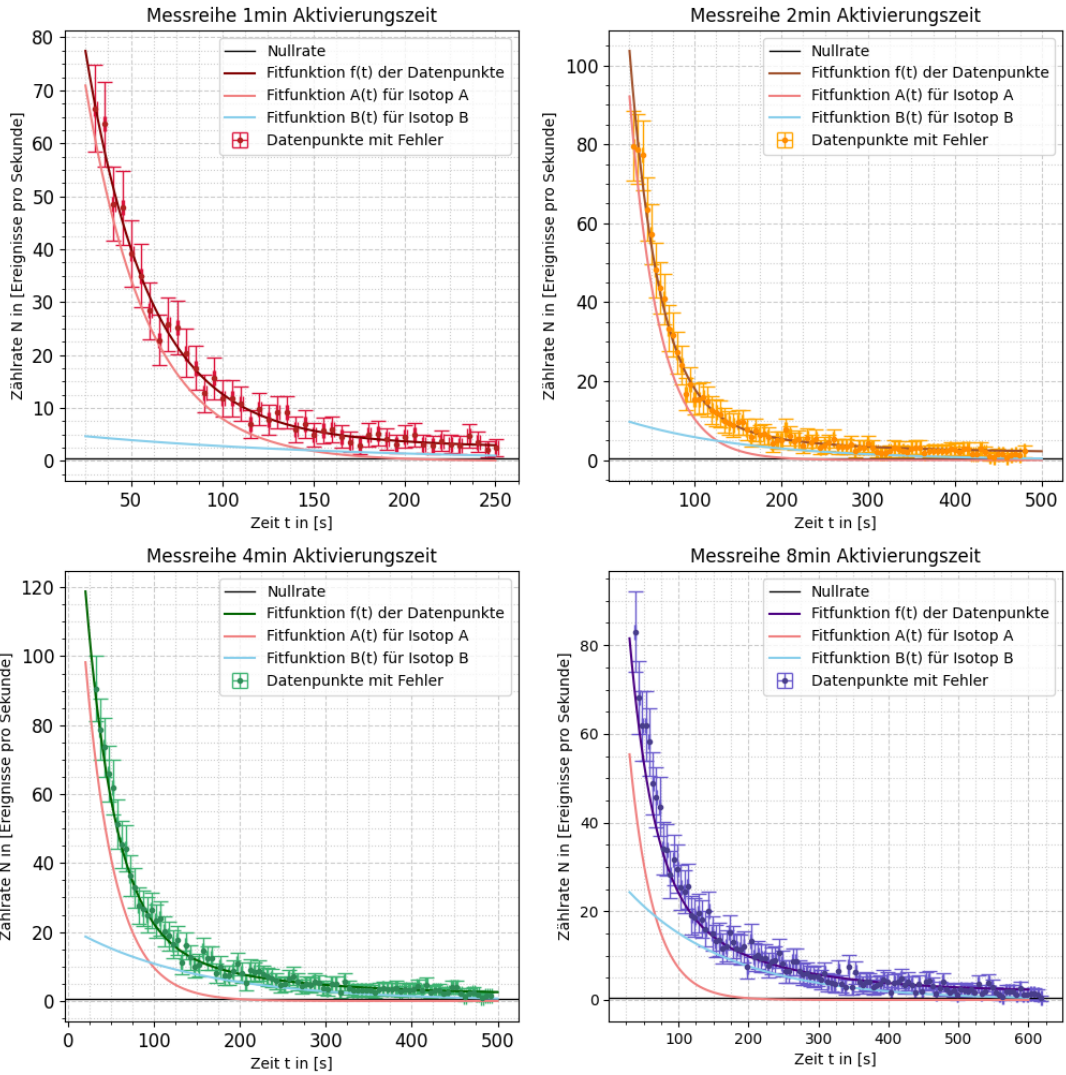
**Abbildung 2.1:** Messdaten der Nullratenmessung mit Fehler, sowie gewichteter Mittelwert dieser Daten

---

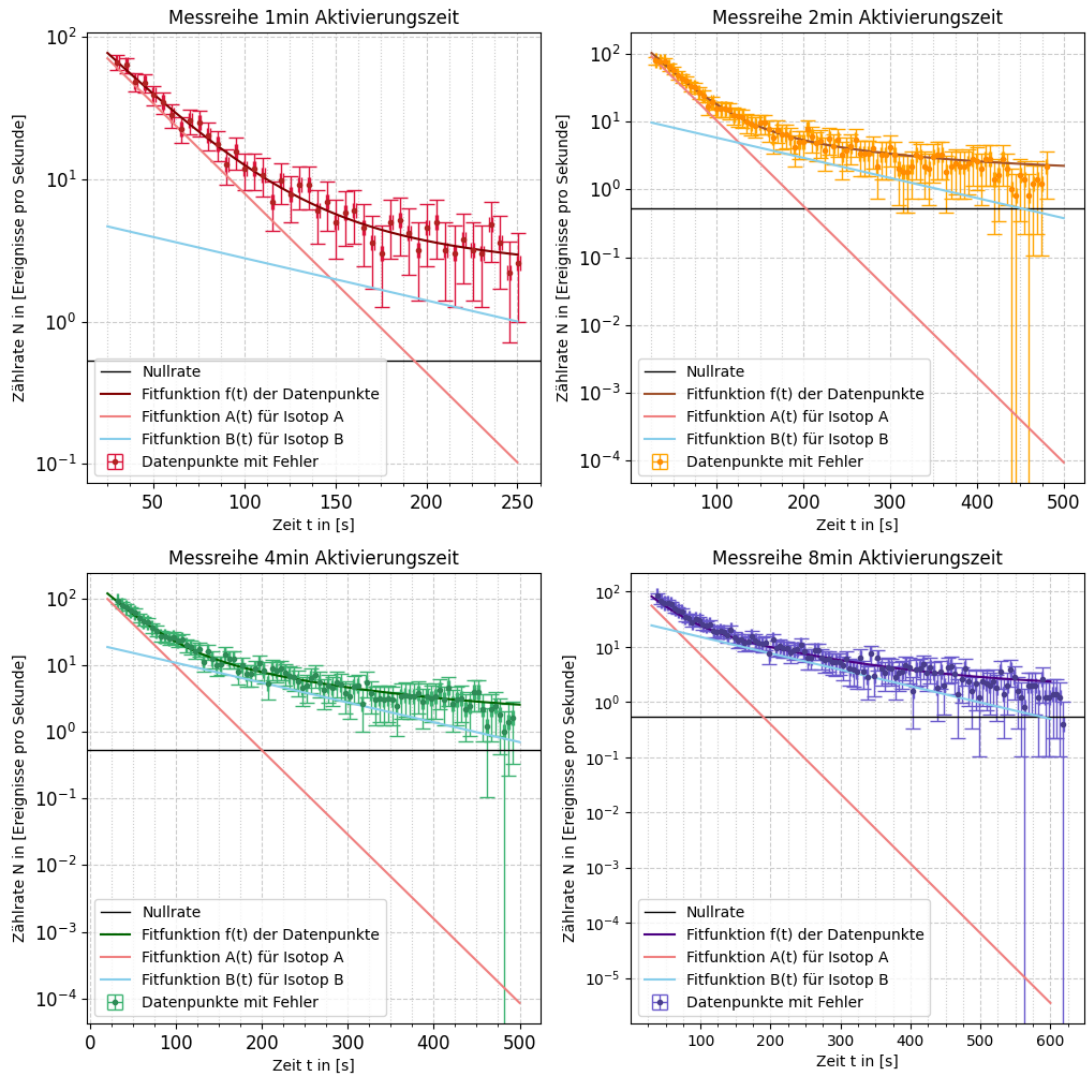
Fitparameter	Wert
$N_A^{1\min}$	$147 \pm 17$
$N_A^{2\min}$	$191 \pm 20$
$N_A^{4\min}$	$176 \pm 21$
$N_A^{8\min}$	$132 \pm 24$
$N_B^{1\min}$	$6 \pm 8$
$N_B^{2\min}$	$12 \pm 9$
$N_B^{4\min}$	$21 \pm 11$
$N_B^{8\min}$	$30 \pm 13$
$T_A$	$23,8 \pm 2,8$
$T_B$	$100 \pm 40$
$N_0$	$1,9 \pm 2,0$

**Tabelle 1:** Die im  $\chi^2$  Fit bestimmten Parameter mit Fehler, nach Python

Dabei ist hier  $\sigma_{f(t_i)}$  als Null anzunehmen. Pythons Optimize Funktion bestimmt bereits einen Fit mit minimalem  $\chi^2$ , es bleibt also lediglich dieses  $\chi^2$  auszulesen und die Anzahl der Freiheitsgrade zu bestimmen. Hier entspricht diese der Anzahl der Parameter, also 11. Damit ergibt sich  $\chi_{\text{red}}^2 = 1,058123943269052$  für den Wert des reduzierten  $\chi^2$ . Die durch den Fit bestimmten Parameter und ihrer Fehler sind in Tabelle 1 angegeben.



**Abbildung 2.2:** Für jede Messreihe mit unterschiedlicher Aktivierungszeit je ein Plot, aufgetragen ist die Zählrate  $N$  gegen die Zeit, es sind sowohl die gemessenen Datenpunkte mit Fehler, also auch der dazugehörige Fit, die Zerfallsfunktionen der einzelnen Isotope und die Nullrate aus der Nullratenmessung eingetragen.



**Abbildung 2.3:** Für jede Messeihe mit unterschiedlicher Aktivierungszeit je ein logarithmischer Plot, aufgetragen ist die Zählrate  $N$  gegen die Zeit, es sind sowohl die gemessenen Datenpunkte mit Fehler, also auch der dazugehörige Fit, die Zerfallsfunktionen der einzelnen Isotope und die Nullrate aus der Nullratenmessung eingetragen.



---

## 2.2 Aktivierungskurven

Die Halbwertszeiten  $T_A$ ,  $T_B$  und die Zerfallsraten  $\dot{N}_0^\tau$  für Isotop A und B zum Zeitpunkt  $t = 0$  sowie deren Fehler werden aus den vorherigen Fits übernommen.

Die Anfangszerfallsraten  $N_0^\tau$ , welche von der Aktivierungszeit  $\tau$  des Silberplättchens abhängen, werden gegen die Aktivierungszeiten 60, 120, 240 und 480 s aufgetragen und anschließend durch die Funktion für die Aktivierungskurven

$$f(\tau) = \dot{N}_0^\infty \left( 1 - \exp\left(-\frac{\ln(2)}{T}\tau\right) \right) \quad (2.2.1)$$

mit einem  $\chi^2$ -Fit aus `scipy.optimize` gefittet, wodurch man den asymptotischen Grenzwert  $\dot{N}_0^\infty$  erhält, gegen den die Anfangsraten für unendliche Aktivierungszeiten konvergieren. In der Fitfunktion werden die Halbwertszeiten nicht als Fitparameter eingebaut, da diese bereits durch den vorherigen Fit, der an viel mehr Messdaten durchgeführt wurde, bekannt sind und somit nicht allzu viel Toleranz unterliegen.

Die Fitparameter sind in Tabelle 2 dargestellt. Der Fehler von Gleichung 2.2.1 ergibt sich nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung 4.1.5 zu

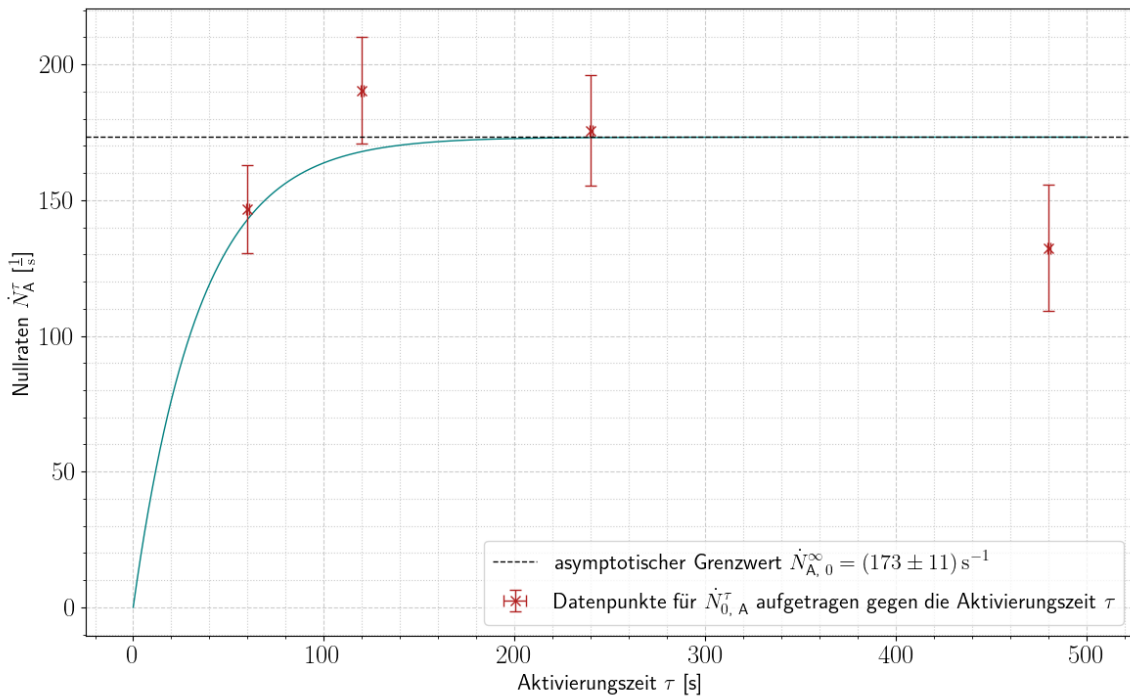
$$\begin{aligned} \sigma_f = & \left( \left( \sigma_\tau \cdot \frac{\ln(2)}{T} N_0^\infty \exp\left(-\frac{\ln(2)}{T}\tau\right) \right)^2 \right. \\ & + \sigma_{N_0^\infty}^2 \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{\ln(2)}{T}\tau\right) \right)^2 \\ & \left. + \left( \sigma_T \cdot N_0^\infty \exp\left(-\frac{\ln(2)}{T}\tau\right) \frac{\ln(2)}{T^2}\tau \right)^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Dann lässt sich das reduzierte  $\chi_{\text{red}}^2$  nach Gleichung 2.1.2 und Gleichung 2.1.3 ausrechnen und ist auch in Tabelle 2 eingetragen.

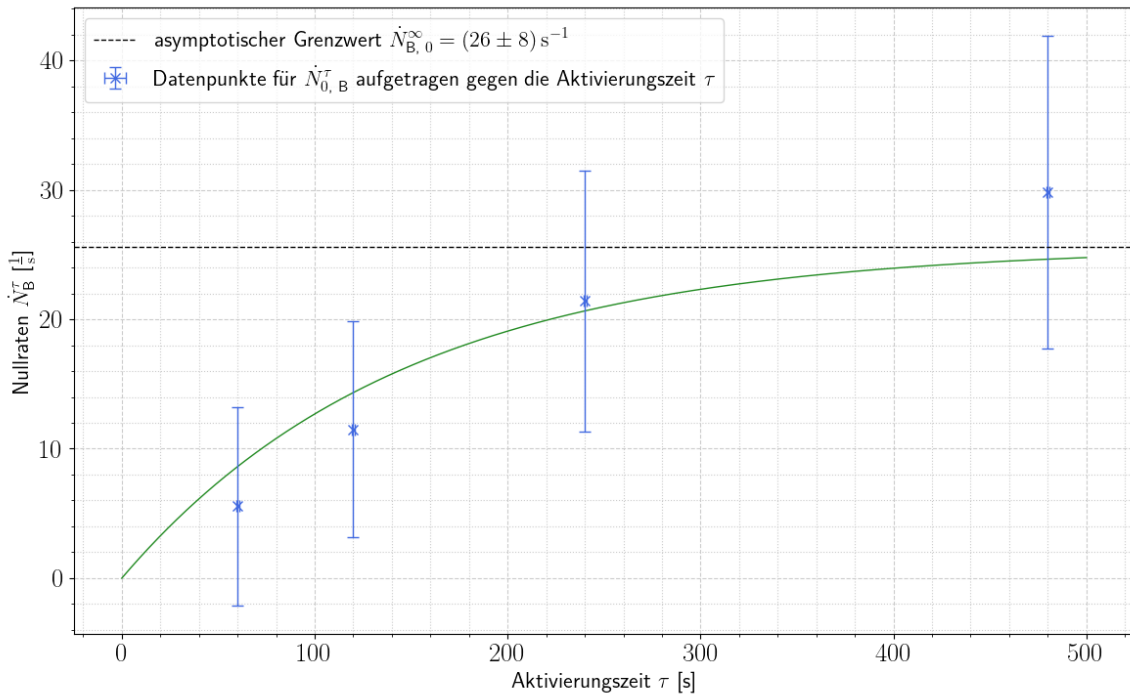
Isotop	asympt. Grenzwert $N_0^\infty$ [s <sup>-1</sup> ]	$\chi_{\text{red}}^2$
A	$173 \pm 11$	$\approx 1,4522$
B	$26 \pm 8$	$\approx 0,1467$

**Tabelle 2:** Fitparameter des Fits an Datenpunkte  $(\tau, N_0^\tau)$  nach Gleichung 2.2.1 mit jeweiligem  $\chi_{\text{red}}^2$

Die Datenpunkte  $(\tau, N_0^\tau)$  mit den Fitkurven und den Grenzwerten sind nochmal in Abbildung 2.4 und Abbildung 2.5 dargestellt.



**Abbildung 2.4:** Datenpunkte  $(\tau, N_0^\tau)$  aus Unterabschnitt 2.1 mit den Fitkurven nach Gleichung 2.2.1 und den Fitwerten aus Tabelle 2 für Isotop A; die eingezeichnete Gerade ist der asymptotische Grenzwert, gegen den die anfänglichen Zerfallsraten für steigende Aktivierungszeiten konvergiert



**Abbildung 2.5:** Datenpunkte  $(\tau, N_0^{\tau})$  aus Unterabschnitt 2.1 mit den Fitkurven nach Gleichung 2.2.1 und den Fitwerten aus Tabelle 2 für Isotop B; die eingezeichnete Gerade ist der asymptotische Grenzwert, gegen den die anfänglichen Zerfallsraten für steigende Aktivierungszeiten konvergiert

---

## 3 Diskussion

### 3.1 Zerfallskurven

In der Nullratenmessung wurde eine Aktivität von  $N_0 = 0,53 \pm 0,25$  gemessen. Der mit dem Python-Fit bestimmte Wert von  $1,9 \pm 2,0$  liegt in einem ein  $\sigma$  Intervall zu diesem Messwert. Auch der im Fit bestimmte Wert der Halbwertszeit von Isotop A  $T_A = 23,8 \pm 2,8$  s liegt in einem ein  $\sigma$  Intervall zum theoretischen Wert von  $T_A = 24,6$  s. Lediglich die Halbwertszeit von Isotop B liegt mit  $T_B = 100 \pm 40$  s in einem zwei  $\sigma$  Intervall zum theoretischen Wert von  $T_B = 143$  s.

Die Berechnung des reduzierten  $\chi^2$  ergibt für diesen Fit einen Wert von etwa  $\chi_{\text{red}}^2 = 1,058$ . Dies ist schon sehr nahe dem erhofften Wert von  $\chi^2 = 1,0$  bei einem gelungenen  $\chi^2$  Fit, jedoch leider nicht exakt passend. Dies erkennt man auch an dem sechs  $\sigma$  Intervall des Werts der Nullmessung zum entsprechenden Wert im Fit.

### 3.2 Aktivierungskurven

Der Kern der Auswertung für die Aktivierungskurven ist die Bestimmung der asymptotischen Grenzwerte, gegen welche die anfänglichen Zerfallsraten für steigende Aktivierungszeiten konvergieren.

Für  $N_{0,A}^\infty = (173 \pm 11) \text{ s}^{-1}$  und  $N_{0,B}^\infty = (26 \pm 8) \text{ s}^{-1}$  konnten keine Literaturwerte gefunden werden. Über die Fehlerintervalle kann man trotzdem sagen, dass diese im Verhältnis zu ihren Werten recht groß ausfallen, was vermutlich an den sehr großen Fehlern der Datenpunkte in y-Richtung insbesondere in Abbildung 2.5 liegt. Für dieses Isotop ist der Fehler immerhin etwa 31 % so groß wie der zugehörige Wert.

Die reduzierten  $\chi_{\text{red}}^2$  in Tabelle 2 betragen  $\chi_{\text{red},A}^2 \approx 1,4522$  und  $\chi_{\text{red},B}^2 \approx 0,1467$ . Beide Werte sollten eigentlich auch POISSON-verteilt sein, was bei  $\chi_{\text{red}}^2 \approx 1$  entspricht. Die Abweichungen betragen also maximal 85,33 %. Diese Abweichung ist ebenso auf die großen Fehler der Datenpunkte zurückzuführen wie auch auf die Tatsache, dass die Datenpunkte die Ergebnisse eines vorangegangenen Fits sind. Der Abstraktionsgrad dieser Datenpunkte ist also bereits hoch, während die Datenpunkte nur theoretisch POISSON-verteilt sind.

Damit erklären sich die Abweichungen.

Abschließend kann noch erwähnt werden, dass in Abbildung 2.4 der letzte Datenpunkt einen kleinen Ausreißer darstellt, der logischerweise bei der langen Aktivierungszeit von 8 min auf entsprechende Abweichungen der Americium-242-Aktivierung in der Tonne zurückzuführen ist, in der nur für kurze Zeiten die Abweichungen entsprechend klein und damit unbedeutend ausfallen.

---

### 3.3 Halbwertszeiten

Die Halbwertszeit für Isotop A beträgt  $(23,8 \pm 2,8)$  s, was in einem  $1 \sigma$ -Intervall liegt. Der Literaturwert beträgt 24,6 s [1, S. 110], dieser Wert ist im Hinblick auf die Messgenauigkeit gelungen.

Der Wert für die Halbwertszeit von Isotop B beträgt  $(100 \pm 40)$  s, was zu dem Theoriewert von 143 s [1, S. 110] in einem  $2 \sigma$ -Intervall liegt. Dass bei größerer Aktivierungszeit der Fehler der Halbwertszeit größer wird, ist wie bereits erwähnt auf die experimentelle Abweichung der Aktivierungstonne zurückzuführen.

---

## 4 Anhang

### 4.1 Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden): wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1.1)$$

Gewichteter Mittelwert: wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (4.1.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (4.1.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (4.1.4)$$

Fehlerfortpflanzung: die zu berechnende Größe  $f$ , die von den zu bestimmenden Größen  $A$  und  $B$  abhängt, kann um weitere Variablen  $C$ ,  $D$ ,  $E$  usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \cdot \frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 + \left(\sigma_B \cdot \frac{\partial f}{\partial B}\right)^2} \quad (4.1.5)$$

---

Lineare Regression: die Steigung  $m$  und der Achsenabschnitt  $b$  des linearen Fits werden – wenn benutzt – durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.1.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.1.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (4.1.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (4.1.9)$$

---

## Literatur

- [1] Peter Schaaf and Jörn Große-Knetter. *Das Physikalische Praktikum, Handbuch 2023/2024 für Studentinnen und Studenten der Physik, Band II*. Universitätsverlag Göttingen, 2023.



---

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Messdaten der Nullratenmessung mit Fehler, sowie gewichteter Mittelwert dieser Daten . . . . .	5
2.2	Für jede Messeihe mit unterschiedlicher Aktivierungszeit je ein Plot, aufgetragen ist die Zählrate $N$ gegen die Zeit, es sind sowohl die gemessenen Datenpunkte mit Fehler, also auch der dazugehörige Fit, die Zerfallsfunktionen der einzelnen Isotope und die Nullrate aus der Nullratenmessung eingetragen. . . . .	7
2.3	Für jede Messeihe mit unterschiedlicher Aktivierungszeit je ein logarithmischer Plot, aufgetragen ist die Zählrate $N$ gegen die Zeit, es sind sowohl die gemessenen Datenpunkte mit Fehler, also auch der dazugehörige Fit, die Zerfallsfunktionen der einzelnen Isotope und die Nullrate aus der Nullratenmessung eingetragen. . . . .	8
2.4	Datenpunkte $(\tau, N_0^\tau)$ aus Unterabschnitt 2.1 mit den Fitkurven nach Gleichung 2.2.1 und den Fitwerten aus Tabelle 2 für Isotop A; die eingezeichnete Gerade ist der asymptotische Grenzwert, gegen den die anfänglichen Zerfallsraten für steigende Aktivierungszeiten konvergiert . . . . .	10
2.5	Datenpunkte $(\tau, N_0^\tau)$ aus Unterabschnitt 2.1 mit den Fitkurven nach Gleichung 2.2.1 und den Fitwerten aus Tabelle 2 für Isotop B; die eingezeichnete Gerade ist der asymptotische Grenzwert, gegen den die anfänglichen Zerfallsraten für steigende Aktivierungszeiten konvergiert . . . . .	11

---

# Tabellenverzeichnis

1	Die im $\chi^2$ Fit bestimmten Parameter mit Fehler, nach Python . . . . .	6
2	Fitparameter des Fits an Datenpunkte $(\tau, N_0^\tau)$ nach Gleichung 2.2.1 mit jeweiligem $\chi_{\text{red}}^2$ . . . . .	10