

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 3

Kreiselprezession

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 10.01.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
3	Durchführung	6
3.1	Aufbau	6
3.2	Experiment	7
4	Auswertung	9
4.1	Trägheit als theoretischer Wert und durch physikalisches Pendel	9
4.2	Trägheitsmoment durch Kreiselpräzession	10
4.3	Nutation	14
5	Diskussion	16
6	Anhang	18
6.1	Präzise Werte	18
6.2	Verwendete und verworfene Messwerte	18
6.3	Fehlerformeln	19
	Literatur	21

1 Einleitung

Wenn man die Erdachse unendlich verlängert, trifft sie in im Mittel 431 Lichtjahren auf den Polarstern α Ursae Minoris. Als die Ägypter vor 2620 bis 2500 Jahren v.Chr. die Pyramiden von Gizeh errichtet hatten, bauten sie in die Cheops-Pyramide einen Schacht, durch den sie den Stern Thuban sahen. Wenn Touristen heute durch das Loch gucken, sehen sie α Ursae Minoris. Das liegt daran, dass die Erdachse in einem Kegel rotiert. Die Steinzeitmenschen hatten hingegen einen dritten Polarstern in der Flucht der Erdachse. Die Sterne des Dreisternsystems wechseln sich also mit der Periode von 25.700 bis 25.850 Jahren in ihrer Rolle als Polarstern ab. Wenn die Pyramiden auch noch 2000 Jahre länger halten und die Touristen dann durch den Schacht blicken, haben sie also das Pech, keinen eindeutigen Polarstern durch dieses architektonische Wunder erkennen zu können. Die Beschreibung kann in Abbildung 1 nachvollzogen werden. Der Grund für die kegelförmige Rotation der Erdachse ist die Kreiselpräzession, die in diesem Versuch zusammen mit der Nutationsbewegung ermittelt werden soll. Weitere Anwendungen befinden sich ebenso in der Astronomie.

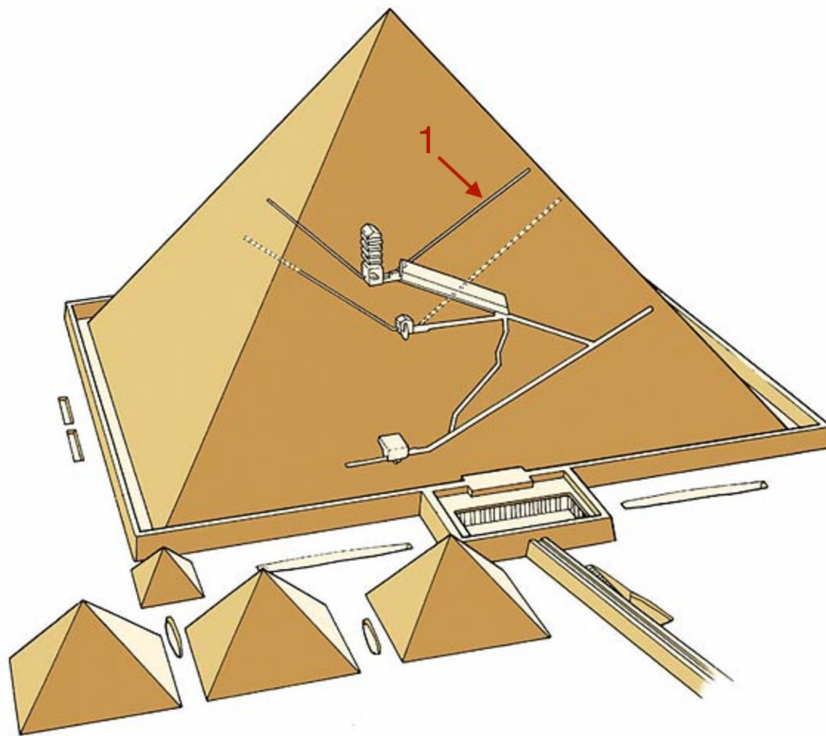


Abbildung 1: Darstellung der inneren Schächte der größten Pyramide von Gizeh, der Cheops-Pyramide; der nördliche Luftschacht zur Königschamber, durch den der Polarstern zu sehen ist, ist mit „1“ gekennzeichnet; Grafik durch **rot Markiertes** verändert aus [4]

2 Theorie

Das Trägheitsmoment eines Zylinders wird berechnet durch [1, S.134]

$$I = \int_V r_{\perp}^2 \frac{M}{\pi R^2 h} dV \quad (2.0.1)$$

mit dem Radius R , Höhe h und Masse M , woraus für I_{\parallel} und I_{\perp} folgt

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2}MR^2, \quad (2.0.2)$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2. \quad (2.0.3)$$

Zum Beschreiben von Rotationsbewegungen um eine freie Drehachse nutzt man die Eulersche Kreiselgleichung [1, S. 145]

$$\vec{D} = \frac{\partial \vec{L}_R}{\partial t} = \frac{\partial \vec{L}_K}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (2.0.4)$$

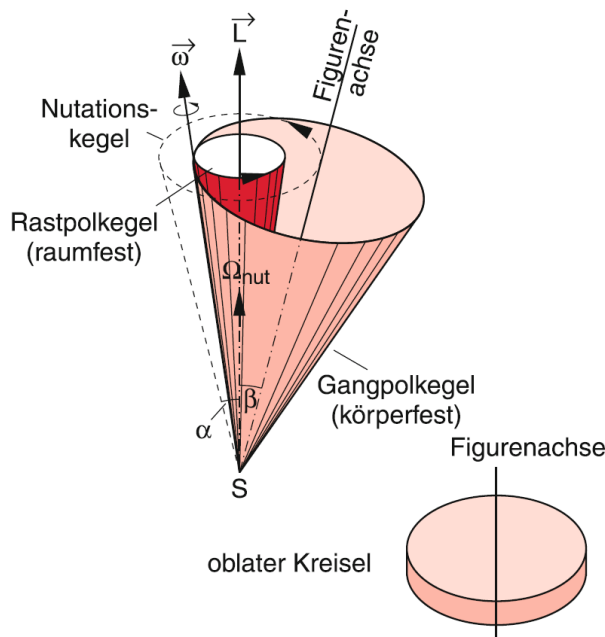


Abbildung 2: Bewegungsachsen einer Rotation mit drei Freiheitsgraden, schematisch dargestellt, aus [1, S.147]

Dabei ist das Drehmoment um eine raumfeste Achse gegeben durch eine Transformation des Drehmoments um eine körperfeste Achse. Man kann nun drei Bewegungsachsen definieren: (vergl. Abbildung 2)

- die raumfeste Drehimpulsachse \vec{L} ,
- die nicht raumfeste Drehachse $\vec{\omega}$
- die Figurenchse, welche raumfest ist, wenn sie mit \vec{L} zusammenfällt.

Liegt die Figurenchse auf der Drehimpulsachse, so kann durch kurze(!) Krafteinwirkung auf den Körper senkrecht zur Figurenchse der Körper in eine sogenannte Nutationsbewegung versetzt werden ($\vec{D} = 0$ während der Nutationsbewegung). Dabei bewegt sich die Figurenchse entlang des Nutationskegels. [1, S.147] Wirkt ein konstantes Drehmoment senkrecht zur Drehimpulsachse \vec{L} ändert sich auch ihre Richtung. Der Körper führt nun eine Präzessionsbewegung aus.

Die Winkelgeschwindigkeit dieser lässt sich berechnen durch $\vec{D} = \vec{\omega}_P \times \vec{L}$ [1, S. 148], woraus folgt:

$$\omega_P = \frac{D}{L \cdot \sin \Theta}. \quad (2.0.5)$$

Mit $D = mgr \cdot \sin \Theta$, wobei m die Masse ist und r der Radius, folgt daraus, dass ω_P von Θ unabhängig ist.

$$\omega_P = \frac{mgr}{I \cdot \omega_R} \quad (2.0.6)$$

Nach dem Trägheitsmoment I umgestellt ergibt sich die Formel

$$I = \frac{mgr}{\omega_P \cdot \omega_R}. \quad (2.0.7)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit eines physikalischen Pendels gilt [1, S. 86/87]

$$\omega = \sqrt{\frac{mgz}{I}}, \quad (2.0.8)$$

dabei ist z der Abstand des Schwerpunktes zur Drehachse. Mit dem steinerschen Satz und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für das Trägheitsmoment der Scheibe mit Zusatzgewicht

$$I = \frac{T^2 g z m}{4\pi^2} - m z^2. \quad (2.0.9)$$

Schließlich kann man den Öffnungswinkel α des Nutationskegels berechnen durch den Zusammenhang [3, S. 90/91]

$$\frac{\omega_N}{\omega_R} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}. \quad (2.0.10)$$

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Im Versuch wird der Kreisel durch ein Rad dargestellt, das an einem Stab befestigt ist und um diesen rotiert. Wahlweise kann der Stab durch zwei Ständer gehalten werden, wenn das Trägheitsmoment des Rades durch seine Ausbildung als physikalisches Pendel betrachtet werden soll. Wenn das Rad seine Rolle als Kreisel einnimmt, balanciert das Rad auf nur einem Ständer, indem auf der anderen Seite des Stützpunktes ein Ausgleichsgewicht befestigt ist. Am Ende des Stabes können auf der Seite des Ausgleichsgewichtes Zusatzmassen angehängt werden, die den Kreisel präzedieren lassen. Der Kreisel wird durch eine Antriebsschnur beschleunigt, die Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels wird mit einer Lichtschranke gemessen. Für weitere Zeitmessungen steht eine Stoppuhr zur Verfügung. Den Versuchsaufbau kann man in Abbildung 3 nachvollziehen.

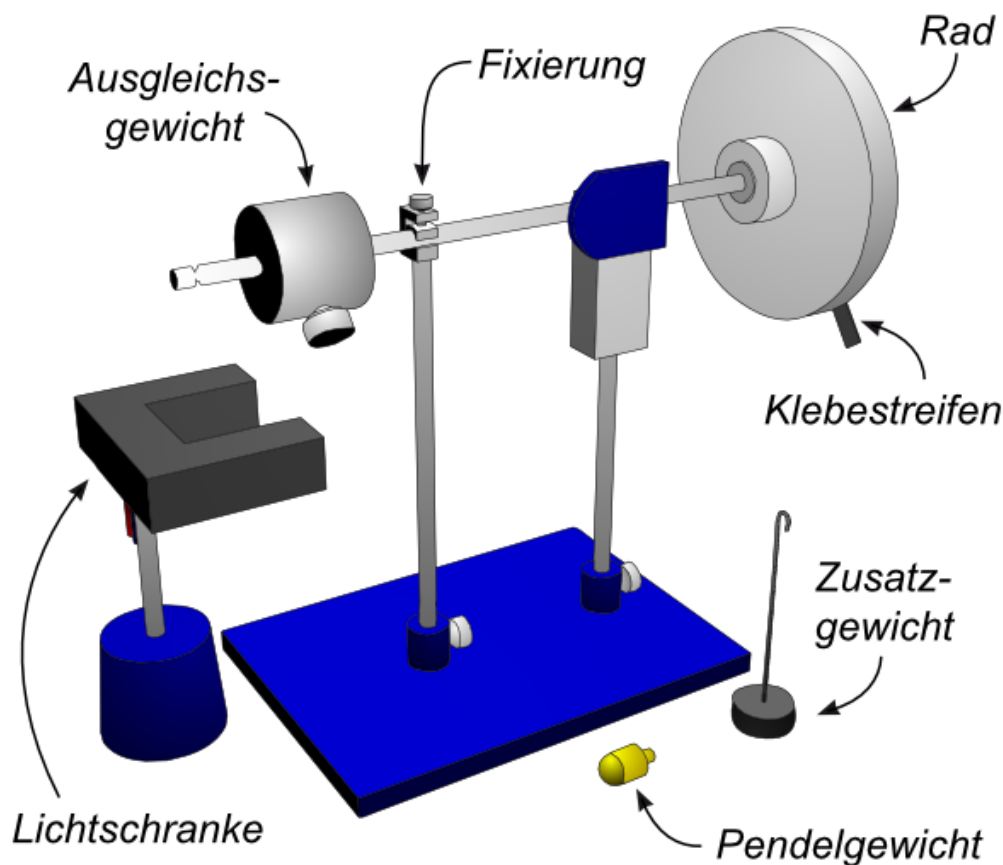


Abbildung 3: Aufbau der Versuches Kreiselpräzession nach [2], hier wird die Stange noch durch zwei Ständer gehalten, wobei für die Präzession und Nutation des Rades ein weiterer Freiheitsgrad der Drehachse benötigt wird

3.2 Experiment

Die Durchführung des Experiments ist ziemlich problematisch. Grundsätzlich ist beim Anwerfen des Kreisels mit der Antriebsschnur der Stab festzuhalten. Beim Starten der Präzessionsbewegung muss das Zusatzgewicht vorsichtig losgelassen werden.

Als erstes wird das Rad als physikalisches Pendel ausgebildet. Der Versuch beginnt mit dem Notieren der Masse des Pendelgewichts. Dieses wird in das Gewinde in der Umlaufläche des Rades gedreht. Es sollen über 10 Perioden dreimal die Schwingungsdauer mit der Stoppuhr gemessen werden. Das Gleiche wird an der diametralen Seite wiederholt.

Das Pendelgewicht wird entfernt. Nun entfernt man den zweiten Ständer. Das Rad wird auf dem verbleibenden Ständer balanciert, indem man mit Fingerspitzengefühl das Ausgleichsgewicht entlang des Stabes verschiebt. Der Abstand des Gewichtes und der Abstand der Einkerbung für das Zusatzgewicht zum Stützpunkt müssen notiert werden. Für die Präzessionsbewegung hängt man jetzt das Zusatzgewicht auf der Seite des Ausgleichsgewichts an. Das Rad wird mit der Aufzugsschnur in möglichst schnelle Rotation versetzt, sodass diese lange anhält. Hilfreich ist es hierbei, die Schnur zu Beginn langsam zu ziehen und zum Schluss - bevor die Schnur das kleine Rad verlässt - aus dem Körper Schwung zu holen. Die Rotation lange am Laufen zu halten, ist bei diesem Versuch die bereits erwähnte Herausforderung. Die Rotationsperiode des Rades wird mit der Lichtschranke gemessen. Der Stab wird nun losgelassen und vorsichtig in die Präzessionsbewegung eingeführt. Die Präzessionsfrequenz wird gemessen, indem man die Zeit, die die Apparatur braucht, um eine halbe Umdrehung zu absolvieren, mit der Stoppuhr misst. Das Zusatzgewicht wird wieder abgenommen und die Rotationsfrequenz mit der Lichtschranke gemessen. Dieser Ablauf wird idealerweise viermal wiederholt, sodass das Rad insgesamt zwei ganze Umdrehungen macht. Während der vier Wiederholungen muss das Rad durchgängig rotieren. Währenddessen muss man also zügig sein und die Messungen gut koordinieren. Die eben beschriebene Prozedur wird für zwei weitere, unterschiedliche Gewichte wiederholt. Die Masse der verwendeten Zusatzgewichte ist zu notieren. Die Durchführung der Präzessionsbewegung ist in Abbildung 4 zu sehen.

Für die Nutation wird das Rad erneut in schnelle Rotation versetzt und die Rotationsperiode gemessen. Nun gibt man dem Stab einen kräftigen Stoß. Dafür eignet es sich, auf das Ausgleichsgewicht zu schlagen. Je schneller das Rad rotiert, desto stärker muss man das Ausgleichsgewicht boxen. Um die benötigte Kraft einzuschätzen, empfiehlt es sich, einen Durchgang, ohne Daten aufzunehmen, durchzuführen. Eine Nutationsperiode wird mit der Stoppuhr gemessen. Der Vorgang wird dreimal wiederholt.

Zum Schluss sind weitere benötigte Daten aufzunehmen, wie die Masse des Rades und seine Dicke, die Masse des Zusatzgewichtes, die Länge des Stabes, der Abstand des kleinen Rades zum Stützpunkt sowie die Reaktionszeit derjenigen Person, welche die Stoppuhr bedient.

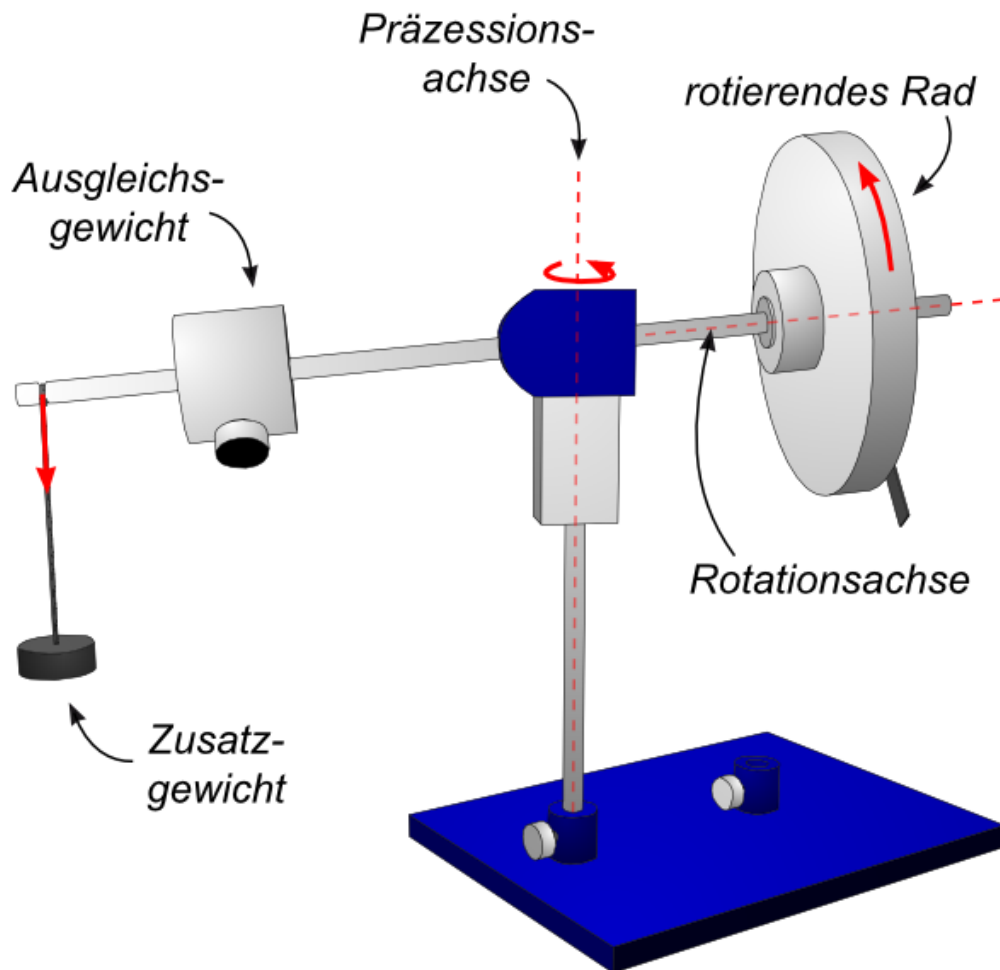


Abbildung 4: Durchführung der Präzessionsbewegung nach [2]

4 Auswertung

4.1 Trägheit als theoretischer Wert und durch physikalisches Pendel

Das Trägheitsmoment parallel zur Drehachse wird über Gleichung 2.0.2 bestimmt und ist

$$I_{\parallel} = 0,00995 \text{ kg m}^2$$

Für eine zur Drehachse senkrechten Achse ist das Trägheitsmoment nach Gleichung 2.0.3

$$I_{\perp} = 0,00506 \text{ kg m}^2$$

Die Angaben für Masse, Dicke und Durchmesser waren auf dem Rad gegeben und wurden als exakt angenommen. Für eine gewisse Genauigkeit wurde auf die ersten drei Werte nach der ersten Nachkommastelle ungleich 0 gerundet, da die Abrundung durch die folgenden Stellen klein ist. Die genauen Werte sind im Anhang im Unterabschnitt 6.1 zu finden.

Das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse kann auch über die Periodendauer des physikalischen Pendels bestimmt werden. Der Gesamtfehler durch die Stoppuhr kann mit Gleichung 6.3.4 berechnet werden, wobei der statistische Fehler σ_{stat} die Reaktionszeit des Stoppuhr Bedienenden ist. Der systematische Fehler ist $\sigma_{sys} = \text{kleinster Skalenwert} + 0,005 \cdot \text{Messwert}$. Damit ist der Fehler für die Stoppuhr

$$\sigma_{t_{ges}} = \sqrt{(0,01 \text{ s} + 0,005 \cdot t)^2 + (0,26 \text{ s})^2} \quad (4.1.1)$$

Für die Fehler der Periodendauern werden die Fehler durch 10 geteilt, weil eine Zeit für 10 Perioden gemessen.

Nach dem gewichteten Mittelwert und seinem Fehler nach Gleichung 6.3.2 und Gleichung 6.3.3 betragen die Periodendauern

$$T_1 = (2,207 \pm 0,017) \text{ s}$$

und für dem Fall, in dem das Zusatzgewicht auf der diametral liegenden Seite,

$$T_2 = (2,229 \pm 0,017) \text{ s}$$

Nun kann man das Trägheitsmoment mit Gleichung 2.0.9 berechnen. Dann ist dieses für beide Fälle

$$I_1 = (0,01066 \pm 0,00018) \text{ kg m}^2$$

$$I_2 = (0,01090 \pm 0,00018) \text{ kg m}^2$$

Die Fehler wurden mit untenstehender Gleichung 4.1.2 berechnet. Die Gleichung 6.3.5 hat nur einen Eintrag, da z und m gegeben waren und somit fehlerlos sind sowie die Erdbeschleunigung g als exakt angenommen wurde.

$$\sigma_{I_{1/2}} = \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{Tgz m}{2\pi^2} \right)^2} \quad (4.1.2)$$

Gewichtet gemittelt nach Gleichung 6.3.2 und Gleichung 6.3.3 ergibt sich die Trägheit

$$I_{\text{Pendel}} = (0,01078 \pm 0,00013) \text{ kg m}^2.$$

4.2 Trägheitsmoment durch Kreiselpräzession

In den nachfolgenden Graphen ist die Präzessionsfrequenz ω_P der Apparatur gegen die reziproke Rotationsfrequenz $\frac{1}{\omega_R}$ aufgetragen. Mit $\omega_R = \frac{2\pi}{T_R}$ entspricht jene gerade der Periodendauer T_R einer ganzen Umdrehung geteilt durch 2π . Die Rotationsdauer des Rades wurde mit der Lichtschranke gemessen. Der Fehler ist damit

$$\sigma_{\frac{1}{\omega_R}} = \frac{0,001 + 0,005 \cdot \text{Messwert}}{2\pi}. \quad (4.2.1)$$

Für alle gemessenen T_R einer Messreihe wurde dieser Fehler durch Gleichung 6.3.1 gemittelt.

Der Fehler der Präzessionsfrequenz ist ganz ähnlich. Der Fehler der Stoppuhr σ_t ist durch Gleichung 4.1.1 gegeben, wobei T_P das doppelte des Messwerts t ist, weil nur eine halbe Präzessionsumdrehung gemessen wurde. Es folgt der Fehler für die Präzessionsfrequenz:

$$\sigma_{\omega_P} = \sqrt{4 \cdot \sigma_{t_{ges}}^2 \left(-\frac{2\pi}{T_P^2} \right)^2}. \quad (4.2.2)$$

Für den Fehler in y-Richtung wurde diese Gleichung der Lichtschranke für verschieden Messungen von t gemittelt.

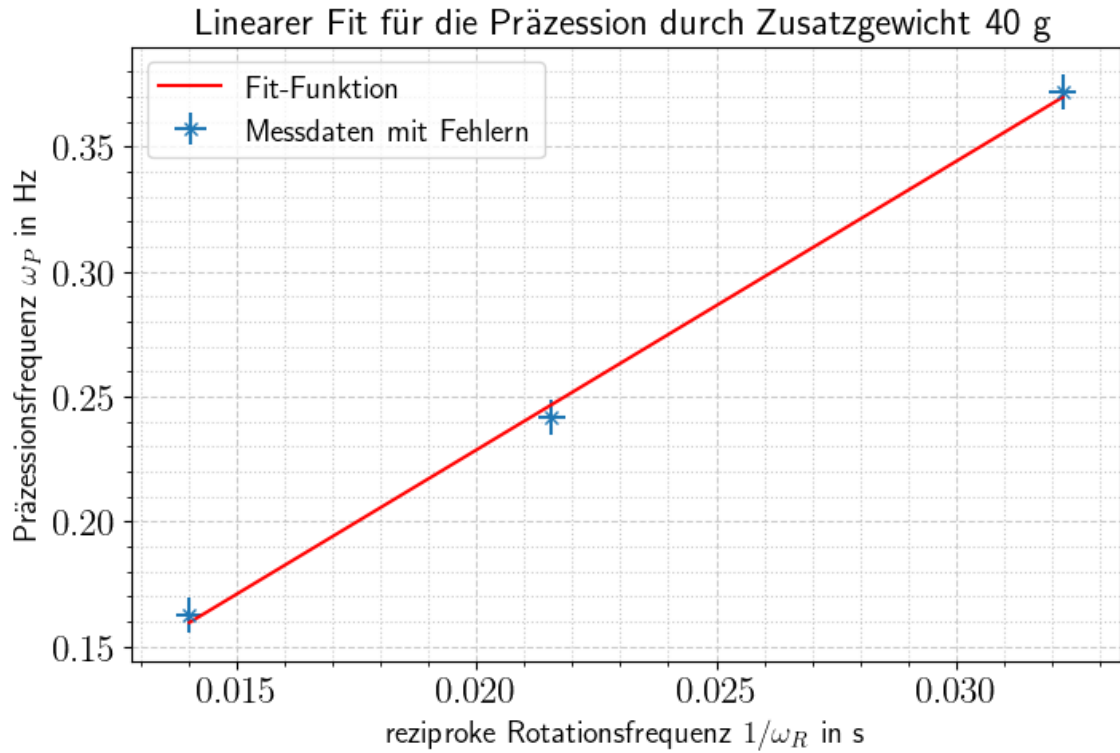


Abbildung 5: Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 40 g mit der Fitfunktion $f_{40g}(x) = (11,5 \pm 0,5) \frac{1}{s^2} \cdot x - (0,002 \pm 0,012) \frac{1}{s}$

Für den nachstehenden Fit ist sehr wahrscheinlich einer der beiden Werte ein Ausreißer, oder beide zum Teil. Da sich für jedes Trägheitsmoment aus einem Paar von ω_P und ω_R als Produkt im Nenner von Tabelle 1 ein Trägheitsmoment ergibt, das sich in maximal zwei σ -Umgebungen der anderen Trägheitsmomente befindet, wurde keiner der Werte herausgenommen.

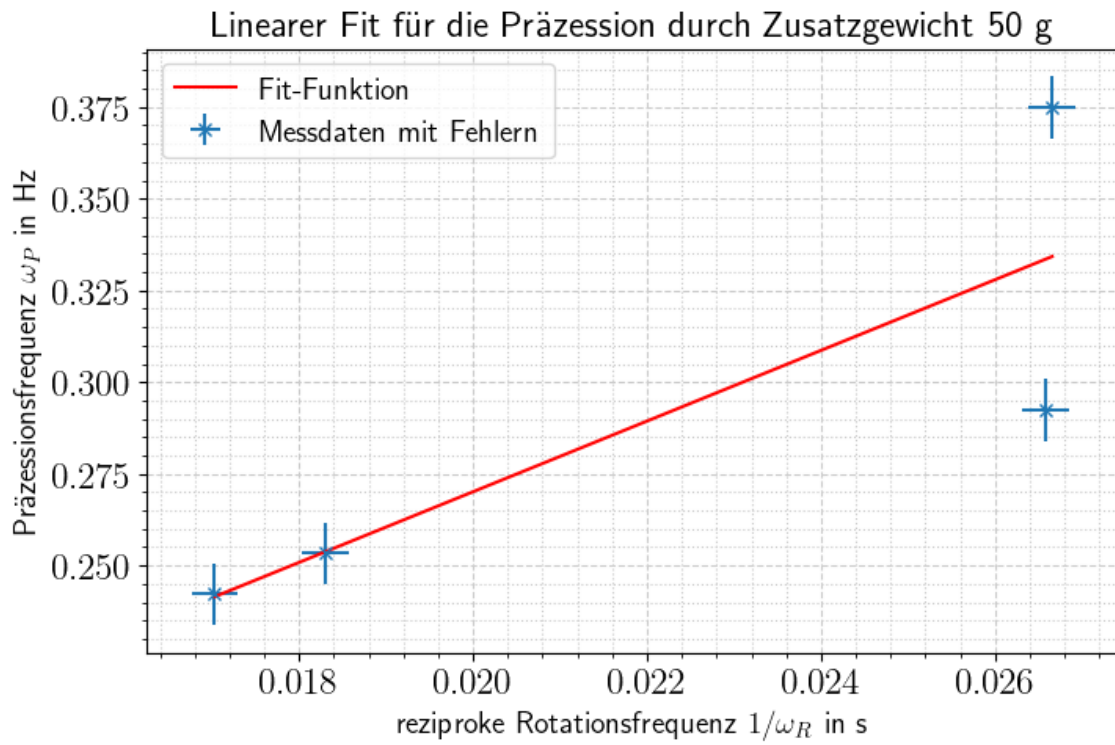


Abbildung 6: Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 50 g mit der Fitfunktion $f_{50g}(x) = (10 \pm 5) \frac{1}{s^2} \cdot x + (0,08 \pm 0,11) \frac{1}{s}$

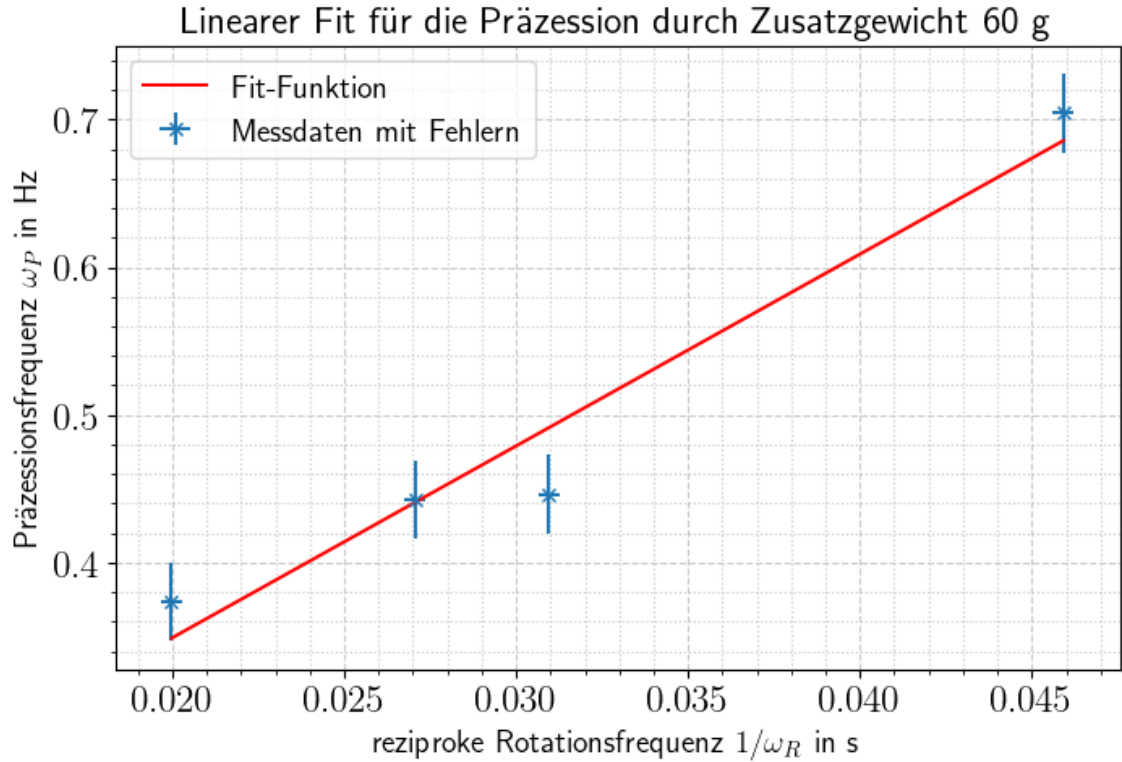


Abbildung 7: Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 60 g mit der Fitfunktion $f_{60g}(x) = (13,0 \pm 2,1) \frac{1}{s^2} \cdot x + (0,09 \pm 0,07) \frac{1}{s}$

Aus den Messreihen, die in den Abbildungen 4 - 6 dargestellt sind, soll das Trägheitsmoment bestimmt werden.

Die Steigung der Plots ist $m_i = \frac{\Delta\omega_P}{\Delta\frac{1}{\omega_R}} = \Delta\omega_P \cdot \Delta\omega_R$. Das ist eben der Nenner der Gleichung 2.0.7, hier noch einmal rekapituliert: $I = \frac{mgr}{\omega_P \cdot \omega_R}$, für die Trägheit der Präzessionsbewegung.

Damit folgt das Trägheitsmoment von der Steigung m_i mit

$$I = \frac{mgr}{m_i} \quad (4.2.3)$$

Der Fehler σ_I berechnet sich nun durch

$$\sigma_I = \sqrt{\sigma_r^2 \left(\frac{mg}{m_i}\right)^2 + \sigma_{m_i}^2 \left(-\frac{mgr}{m_i^2}\right)^2} \quad (4.2.4)$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

Masse m	Steigung m_i in $\frac{1}{s^2}$	Trägheitsmoment I in kg m^2
40 g	$(11,5 \pm 0,5)$	$(0,0092 \pm 0,0004)$
50 g	(10 ± 5)	$(0,013 \pm 0,007)$
60 g	$(13,0 \pm 2,1)$	$(0,0122 \pm 0,0020)$

Tabelle 1: Caption

Mit dem gewichteten Mittelwert nach Gleichung 6.3.2 und Fehler nach Gleichung 6.3.3 ergibt sich ein Gesamtträgheitsmoment durch Kreiselpräzession von

$$I_{\text{Präz.}} = (0,0094 \pm 0,0004) \text{ kg m}^2$$

4.3 Nutation

Die Nutationsfrequenz aufgetragen gegen die Rotationsfrequenz gibt einen linearen Zusammenhang, welcher mittels linearer Regression durch Python dargestellt ist.

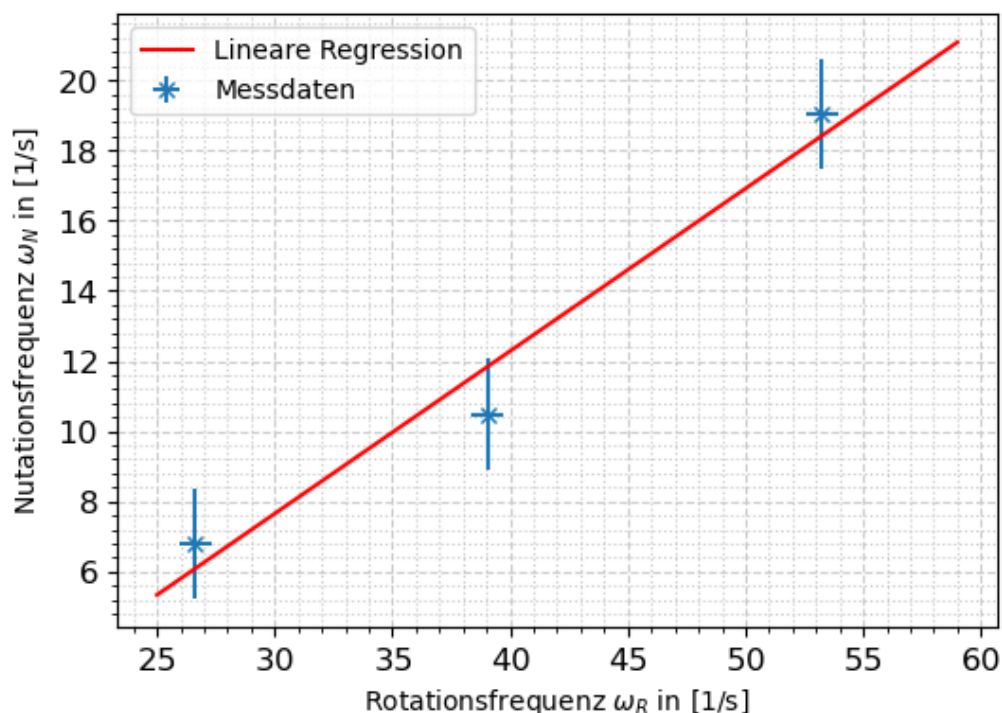


Abbildung 8: Nutationsfrequenz aufgetragen gegen Rotationsfrequenz, mit linearer Regression nach Python

Die Fehler wurden dabei nach Gleichung 6.3.5 und Gleichung 6.3.4 bestimmt, mit:

$$\sigma_N = \frac{1}{10} \sqrt{\sigma_{T,ges}^2 \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)^2} \quad (4.3.1)$$

$$\sigma_{T,ges} = \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{T,syst}^2} \quad (4.3.2)$$

$$\sigma_{T,syst} = 0,01 + 0,005 \cdot \text{Messwert} \quad (4.3.3)$$

Dabei war zu beachten, dass die Periodendauer für die Nutationsbewegung bestimmt wurde, durch eine Messung der Zeit für 10 Perioden.

Für die Steigung in Abbildung 8 ergibt sich $\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0.4033 \pm 0,0006$, dabei wurde der Fehler berechnet nach Gleichung 6.3.8.

Dieser Wert ist konstant für alle ω_N und ω_R , somit folgt dass er nicht von ihnen abhängt. Dies legt nahe, dass es sich um den Zusammenhang aus Gleichung 2.0.10 handelt und somit gilt: $\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0.4033 \pm 0,0006 = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}$

5 Diskussion

Da das Rad sehr langsam lief und schnell an Geschwindigkeit verloren hat, wurden für die Ergebnisse in Abbildung 8 die doppelte Anzahl an Messungen vorgenommen, um eventuell unbrauchbaren Werten vorzubeugen. Dabei wurden alle Werte aus Messreihe 2 verworfen, sowie ein Ausreißer-Wert der Messreihe 1, welcher offensichtlich einen Fehler hatte. In Unterabschnitt 4.2 wurden für die Messreihen für die Zusatzgewichte von 50 g und 60 g zwei Messdurchgänge gemacht, da die abnehmende Rotationsgeschwindigkeit des Rades nicht für drei Werte der Präzessionsfrequenz und vier Werte der Rotationsfrequenz gereicht hätte. Da die Präzessionsfrequenzen einzig von der Rotationsgeschwindigkeit des Rades abhängen, wenn alle anderen Variablen gleich bleiben, erhält man so das doppelte an Messpaaren aus ω_R und ω_P . Durch die durchaus anfordernde Versuchsdurchführung war die Fehleranfälligkeit höher.

Um dieser Art Problemen in der Zukunft vorzubeugen wäre eine regelmäßige Kontrolle und Reinigung der Räder hilfreich, sowie weitere Versuchsaufbauten, zum Austauschen der Teile oder sogar Wechseln der Station bei derartigen Problemen (das Rad gab während des gesamten Versuches wenn es in Bewegung war, deutlich hörbare "Schleif-Geräusche" von sich).

Auch die Lichtschranke hat nicht einwandfrei funktioniert und musste während des Versuches ausgetauscht werden. Anhand der Diagramme, die die Präzessionsfrequenz gegen die reziproke Rotationsfrequenz zeigen, erkennt man, dass an einigen Stellen die Fehler zu klein sind. Die Werte benutzt in Abbildung 8 wurde mit der neuen Lichtschranke gemessen, und es ist deutlich, dass der Fehler hier besser passt. Die Fits aus Abbildung 5 bis Abbildung 7 für die Präzession wurden hingegen mit der alten - teils fehlerhaften - Lichtschranke gemessen. Daher ist der Fehler in den Fits in x-Richtung etwas zu klein (bis auf in Abbildung 5).

Das Trägheitsmoment I_{\parallel} des Rades entspricht dem Trägheitsmoment I_{Pendel} , das durch das physikalische Pendel bestimmt wurde. Jenes liegt innerhalb des 5- σ -Intervalls von dem Wert durch das Pendel. Wenn man in Betracht zieht, dass die Größen z als Abstand des Zusatzgewichtes von der Drehachse als halber Durchmesser und das Zusatzgewicht m durch den Versuchsaufbau gegeben waren und damit nicht in den Fehler von I_{Pendel} eingehen, liegen die Werte sehr nah beieinander. Der Fehler der Periodendauer des Pendels T ist somit auch nicht zu klein bestimmt, da die tatsächliche (nicht bloß angegebene) Masse des Zusatzgewichtes und der Radius des Rades Abweichungen von ihrem dem Versuchsaufbau zu entnehmendem Wert zeigen.

Auch wenn das nicht gefragt war, wurde in Unterabschnitt 4.2 das Trägheitsmoment für jedes Zusatzgewicht gemittelt. Der theoretische Wert für I_{\parallel} befindet sich in einem 2- σ -Intervall von dem Wert aus der Präzession $I_{\text{Präz.}}$. Der Wert für das Trägheitsmoment des Pendel I_{Pendel} liegt innerhalb eines 4- σ -Intervalls. Die Werte für das Trägheitsmoment aus Tabelle 1 liegen maximal in einem 10- σ -Intervall (Wert für 50 g in dem 8- σ -Intervall von dem Wert für 40 g). Allerdings ist der Fehler für das Trägheitsmoment aus der

Messreihe mit 50 g deutlich größer, sodass der Wert für 40 g innerhalb des $1\text{-}\sigma$ -Intervalls von dem Wert für 50 g liegt.

Allgemein liegen alle berechneten Werte für das Trägheitsmoment rund um $I \approx 0,01 \text{ kg m}^2$ innerhalb kleiner Fehlerintervalle. Entgegen anfänglicher Schwierigkeiten sind die Messungen und Ergebnisse damit gut gelungen.

6 Anhang

6.1 Präzise Werte

Genaue Werte, für die aufgrund eines nicht vorhandenen Fehlers keine signifikanten Stellen bestimmt werden können:

$$I_{\parallel} = 0.00994914 \text{ kg m}^2 \quad (6.1.1)$$

$$I_{\perp} = 0,005061203875 \text{ kg m}^2 \quad (6.1.2)$$

6.2 Verwendete und verworfene Messwerte

Für die Auswertung wurden bei der Nutationsfrequenz aufgetragen gegen die Rotationsfrequenz Werte von der ersten Messreihe verwendet, da in der zweiten Messreihe ein Fehler passiert sein muss, deutlich zu sehen in Abbildung 9. Auch in der ersten Messreihe gibt es einen Wert der sehr offensichtlich nicht passt, und vermutlich ein Messfehler war, dieser wurde für die Berechnungen auch verworfen.

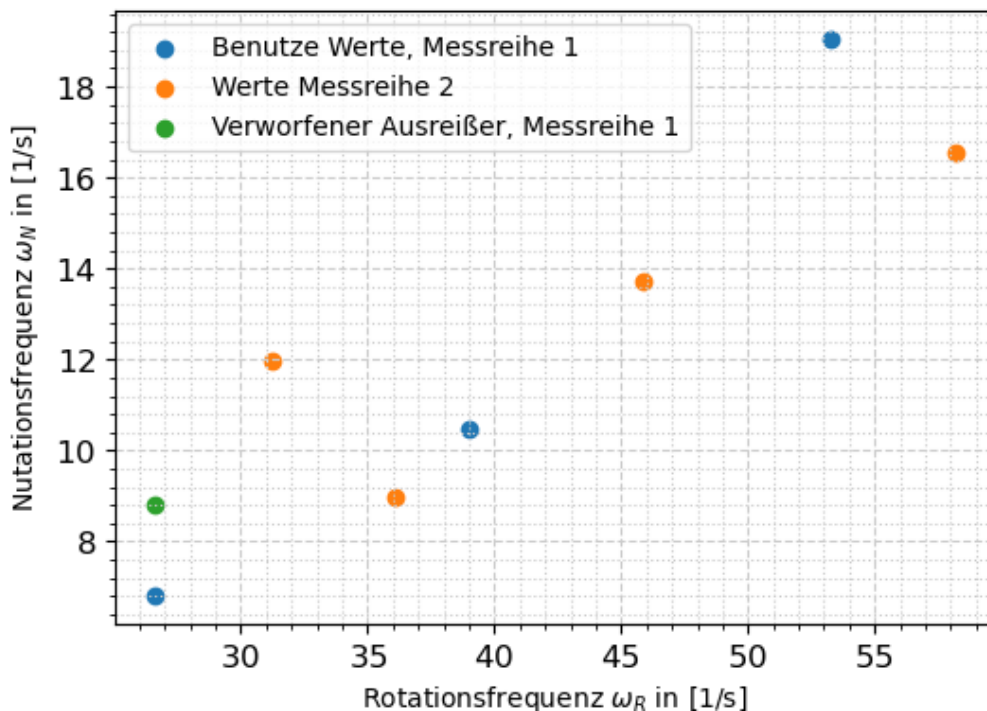


Abbildung 9: benutzte Werte, verworfene Werte und Ausreißer der ersten Messreihe

6.3 Fehlerformeln

Formeln für Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.3.1)$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.3.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.3.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, zieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.3.4)$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{(\sigma_A(\frac{\partial f}{\partial A}))^2 + (\sigma_B(\frac{\partial f}{\partial B}))^2} \quad (6.3.5)$$

Lineare Regression; die Steigung m und der Achsenabschnitt b den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.3.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.3.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.3.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.3.9)$$

Literatur

- [1] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme*. Springer Spektrum, 8. edition, 2018.
- [2] Lehrportal Uni Göttingen. Kreiselpräzession, 2022. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637>, last access: 2023-10-01.
- [3] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 25. edition, 2015.
- [4] Jens Rehländer. Cheops-Pyramide: Gibt es eine Schatzkammer?, 2004. <https://www.geo.de/geolino/mensch/10362-rtkl-aegypten-cheops-pyramide-gibt-es-eine-schatzkammer>, last access: 29.01.2023.

Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung der inneren Schächte der größten Pyramide von Gizeh, der Cheops-Pyramide; der nördliche Luftschacht zur Königskammer, durch den der Polarstern zu sehen ist, ist mit „1“ gekennzeichnet; Grafik durch rot Markiertes verändert aus [4]	3
2	Bewegungsachsen einer Rotation mit drei Freiheitsgraden, schematisch dargestellt, aus [1, S.147]	4
3	Aufbau der Versuches Kreiselpräzession nach [2], hier wird die Stange noch durch zwei Ständer gehalten, wobei für die Präzession und Nutation des Rades ein weiterer Freiheitsgrad der Drehachse benötigt wird	6
4	Durchführung der Präzessionsbewegung nach [2]	8
5	Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 40 g mit der Fitfunktion $f_{40g}(x) = (11,5 \pm 0,5) \frac{1}{s^2} \cdot x -$	
6	Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 50 g mit der Fitfunktion $f_{50g}(x) = (10 \pm 5) \frac{1}{s^2} \cdot x + (0,0$	
7	Linearer Fit für das Zusatzgewicht von 60 g mit der Fitfunktion $f_{60g}(x) = (13,0 \pm 2,1) \frac{1}{s^2} \cdot x +$	
8	Nutationsfrequenz aufgetragen gegen Rotationsfrequenz, mit linearer Regression nach Python	14
9	benutzte Werte, verworfene Werte und Ausreißer der ersten Messreihe . .	18