

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,  
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

---

**Versuch 9**  
**Kapillarität und Viskosität**

---

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 01.06.23

Testat:

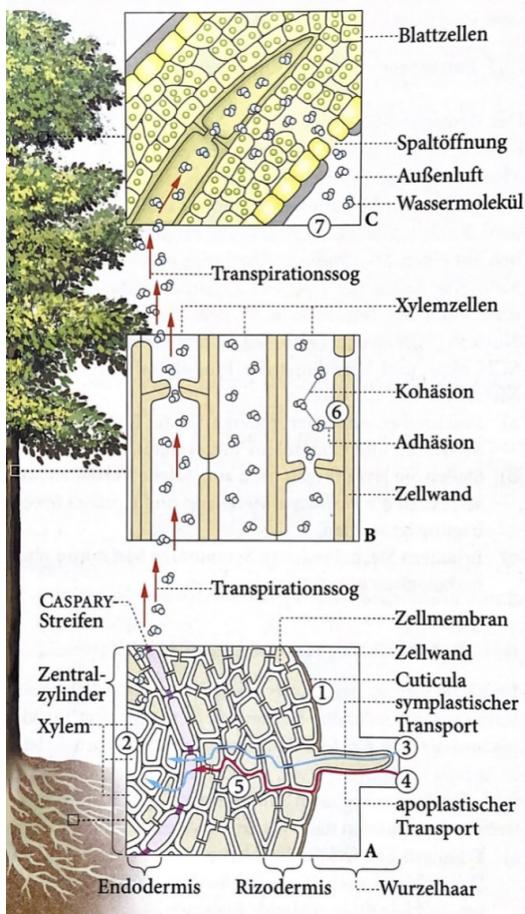
---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Chemischer Aufbau von Wasser . . . . .	5
2.2	Kapillarität . . . . .	6
2.3	Funktionsweise der Mohrschen Waage . . . . .	8
2.4	Dynamische Viskosität . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>11</b>
3.1	Aufbau . . . . .	11
3.2	Experiment . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
4.1	Oberflächenspannung . . . . .	14
4.2	Dynamische Viskosität von dest. Wasser abhängig von Auslaufzeit . . . . .	14
4.3	Dynamische Viskosität von destilliertem Wasser durch Abhängigkeit der Auslaufzeit zum Wasserstand . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>
5.1	Werte berechnet mit "richtigem" Radius . . . . .	17
5.2	Werte berechnet mit "falschem" Radius . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>20</b>
6.1	Fehlerformeln . . . . .	20
	<b>Literatur</b>	<b>22</b>

# 1 Einleitung

In Kalifornien wächst der Riesenmammutbaum an den Hängen der Sierra Nevada, ein amerikanisches Hochgebirge. Diese Baumart erreicht ausgewachsen eine Höhe von 95 m, was sie zur größten Pflanzenart der Welt macht. Wie der Baum es schafft, bis an die Spitze der Baumkrone Wasser zu ziehen, das in den Sonnen-exponierten Bereichen für die Fotosynthese, aus welcher der Baum Glukose für sein Wachstum gewinnt, benötigt wird, ist Thema dieses Versuchs.



**Abbildung 1:** Abbildung zur Veranschaulichung der Wasserversorgung von Bäumen; aus [1]

In den Wurzeln wird das Wasser durch die Wurzelhaare, welche der Oberflächenvergrößerung dienen, aufgenommen und im Intermembran- und interzellulären Raum (apoplastischer Transport) sowie in den Zellen (symplastischer Transport) in den Zentralzylinder<sup>1</sup> überführt. Dort gelangt das Wasser in das Xylem, eine lange Leitung aus verholzten (toten) Zellen.

An der Unterseite der Blätter wird O<sub>2</sub> und Wasserdampf durch die Spaltöffnungen, auch Stomata, über Transpiration an die Umgebungsluft abgegeben. In dem Wurzelgewebe entsteht durch das einströmende Wasser ein Überdruck, der sog. Wurzelndruck. Durch das verdampfende Wasser entsteht in den Blättern ein Unterdruck. Durch diesen Transpirationssog steigt das Wasser durch das Xylem im Stamm empor.

Kapillarität, die Hauptbestandteil dieses Versuchs ist, beschreibt dabei das Phänomen, dass Flüssigkeiten in dünnen Röhren (Kapillaren) automatisch ansteigen, was durch das Druckgefälle von Wurzeln zu Baumkrone verstärkt wird. Dabei sorgt die Kohäsionskraft für den Zusammenhalt der Wassermoleküle. Die Adhäsion, eine weitere Kapillarkraft, die in dünnen Flüssigkeitsleitungen auftreten, entstehen mit zunehmender Höhe Reibungskräfte, die eine maximale Höhe von Bäumen mit 150 m festlegt. Eine physikalische Untersuchung der Kapillarität kann der Biologie dabei helfen, das

<sup>1</sup>Der CASPARY-Streifen zwingt auch das Wasser des apoplastischen Transports, über die Zellwände in das Innere der Zellen überzugehen.

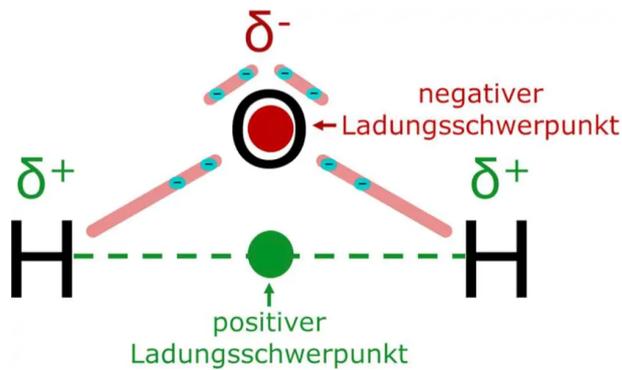
---

Phänomen des Transpirationssoges besser zu verstehen, um beispielsweise Pflanzen auf Raumstationen anpflanzen zu können. Im Zuge dessen wird die Oberflächenspannung von Wasser bestimmt, die eine Fähigkeit zur Kapillarität bestimmt.

Die Größe der dynamischen Viskosität beschreibt die Zähflüssigkeit von Stoffen und hat große Bedeutung für die Chemie, um neue Chemikalien zu synthetisieren, die aufgrund ihrer Viskosität bestimmte Funktionen erfüllen. Ein Beispiel dafür wären neu entwickelte Motoröle, die unter anderem die Funktion als Schmiermittel in Motoren erfüllen. Die Bestimmung der Viskosität von Wasser ist zweiter Teil der Versuchsdurchführung.

## 2 Theorie

### 2.1 Chemischer Aufbau von Wasser

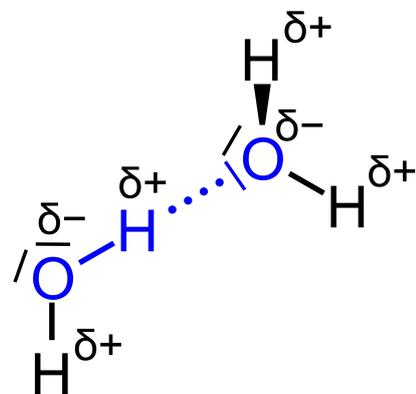


**Abbildung 2:** Aufbau eines Wassermoleküls mit Dipolstruktur; zu sehen ist, wie die Bindungselektronen durch das Sauerstoffatom stärker angezogen werden; aus [8]

von 0,5 bis 1,7 handelt es sich bei der entstehenden Bindung um ein Dipol, darüber Ionenbindungen wie NaCl.

Wasser besteht nun aus Sauerstoff mit  $EN_O = 3,44$  und Wasserstoff mit  $EN_H = 2,2$ . Dann ist  $\Delta_{H_2O} = 3,44 - 2,2 = 1,24$ . Es handelt sich also bei Wasser um ein Dipol, wie in Abbildung 2 zu sehen ist. Da das Sauerstoffatom in der Bindung die Elektronen an sich zieht, werden positiver und negativer Ladungsschwerpunkt räumlich getrennt, wodurch Partialladungen, gekennzeichnet mit  $\delta^\pm$  entstehen. Zwischen der negativen Partialladung eines Sauerstoffatoms und der positiven Partialladung eines Wasserstoffatoms an einem zweiten Wassermolekül bilden sich Wasserstoffbrücken, wie in Abbildung 3 nachvollzogen werden kann. Diese Wasserstoffbrücken sind stärker als andere intermolekulare Wechselwirkungen wie Van-der-Waals-Kräfte<sup>2</sup> und verursachen die starke Oberflächenspannung von Wasser.

Die Eigenschaften des Wassers ( $H_2O$ ) gehen insbesondere auf die Dipoleigenschaft zurück. In chemischen Bindungen sind mehrere Atome beteiligt. Die Eigenschaften der beteiligten Elemente können im Periodensystem nachgelesen werden. Eine entscheidende Größe ist dabei die dimensionslose Elektronennegativität EN nach PAULING, die angibt, wie stark ein Atomkern an den Bindungselektronen der Doppelbindung zieht. Eine Differenz der Elektronennegativität bis 0,5 lässt Moleküle entstehen, deren positiver und negativer Ladungsschwerpunkt räumlich aufeinanderfallen, so wie bei (den meisten) Kohlenwasserstoffen. Bei einer Differenz  $\Delta$



**Abbildung 3:** Veranschaulichung zur Wasserstoffbrücke; die beteiligten Molekülteile sind blau gekennzeichnet, die eigentliche Brücke ist gepunktet; aus [7]

<sup>2</sup>Diese Wechselwirkung beruht auf zufälliger Verteilung der Elektronen, durch die spontane schwache "Dipole" entstehen; insbesondere wichtig bei lipophilen Stoffen

---

## 2.2 Kapillarität

Die Grundlage ist, dass eine Änderung der Oberfläche  $A$  unter einem Fluid mit Oberflächenspannung eine Arbeit  $W$  benötigt. Die Änderung dieser Arbeit kennzeichnet die Oberflächenspannung, sodass  $\frac{dW}{dA} = \sigma$  [3, S. 169 f.] ist.

In einem dünnen Röhrchen, einer Kapillare, in der eine Flüssigkeit steigt, gibt es drei Grenzflächenspannungen zwischen den beiliegten Oberflächen/Stoffen: Dampf über der Flüssigkeitssäule (D), Wand der Kapillare (W) und der aufsteigende Flüssigkeit (F).

Die Oberflächenspannungen sind dann  $\sigma_{DF}$  als Oberflächen zwischen Wand und Dampf; analog für  $\sigma_{FW}$  und  $\sigma_{DW}$ . In dieser Kapillare entstehen Menisken. Das sind Steigungen am Rande der Kapillare, die mit einem Kontaktwinkel  $\theta$  auf die Wand des Röhrchens treffen. Unter diesen Menisken bildet sich eine halbkreisförmige Krümmung an der Kontaktfläche der Flüssigkeit zur Luft. Je höher die Flüssigkeit in der Kapillare nun steigt, desto kleiner ist der Kontaktwinkel  $\theta$ .

Sind die Wände nun vollständig benetzt, wird  $\theta = 0^\circ$ . Es gilt  $\sigma_{DW} - \sigma_{FW} > \sigma_{DF}$ . Der hydrostatische Schweredruck einer Wassersäule ist nach [6, S. 102]

$$p = g\rho h \quad (2.2.1)$$

mit  $h$  als Steighöhe der Flüssigkeit, hier Wasser, der Erdbeschleunigung  $g$  und der Dichte  $\rho$ . Da es sich um einen Unterdruck handeln muss, der das Wasser in die Kapillare saugt, brauchen wir ein anderes Vorzeichen, sodass

$$p_{\text{Säule}} = -g\rho h \quad (2.2.2)$$

gilt. Der Unterdruck an der konkaven Oberfläche ist

$$p_{\text{FD}} = -\frac{2\sigma_{\text{FD}}}{R} = -\frac{2\sigma_{\text{FD}}}{r}, \quad (2.2.3)$$

wobei  $r$  den Radius der Kapillare bezeichnet, der in diesem Fall gleich dem Radius  $R$  der Krümmung ist, da  $\theta$  zu  $0^\circ$  wird. Gleichgewicht, in dem das Wasser nicht weiter steigt, tritt ein, wenn die Drücke gleich sind, also

$$p_{\text{Säule}} \stackrel{!}{=} p_{\text{FD}} \quad (2.2.4)$$

$$\Leftrightarrow -g\rho = -\frac{2\sigma_{\text{FD}}}{r} \quad (2.2.5)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\text{FD}} = \frac{1}{2}h\rho gr. \quad (2.2.6)$$

Die Grenzflächenspannung an Oberfläche und Dampf ist offensichtlich auch die interessierte Oberflächenspannung von Wasser.

Wichtig ist auch der Fall, dass  $\theta < 90^\circ$ . Dies wird auch als Kapillaraszension bezeichnet.

Dann ist der Radius der konkaven Krümmung  $R$  größer als der Radius  $r$  der Kapillare. Durch trigonometrische Beziehungen gilt  $r = R \cdot \cos(\varphi)$ , wie man sich an Abbildung 4 plausibel machen kann. Nun ist wieder

$$p_{\text{Säule}} = -g\rho h. \quad (2.2.7)$$

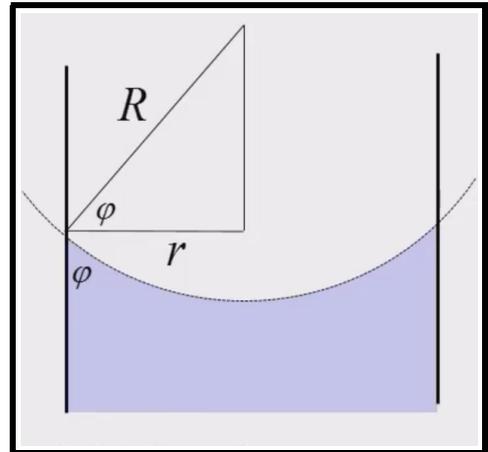
Über Gleichung 2.2.3 mit der oben genannten Beziehung zwischen  $R$  und  $r$  folgt

$$p_{\text{FD}} = -\frac{2\sigma_{\text{DF}}}{R} = -\frac{2\sigma_{\text{DF}} \cos(\varphi)}{r}. \quad (2.2.8)$$

Gleichsetzen ergibt

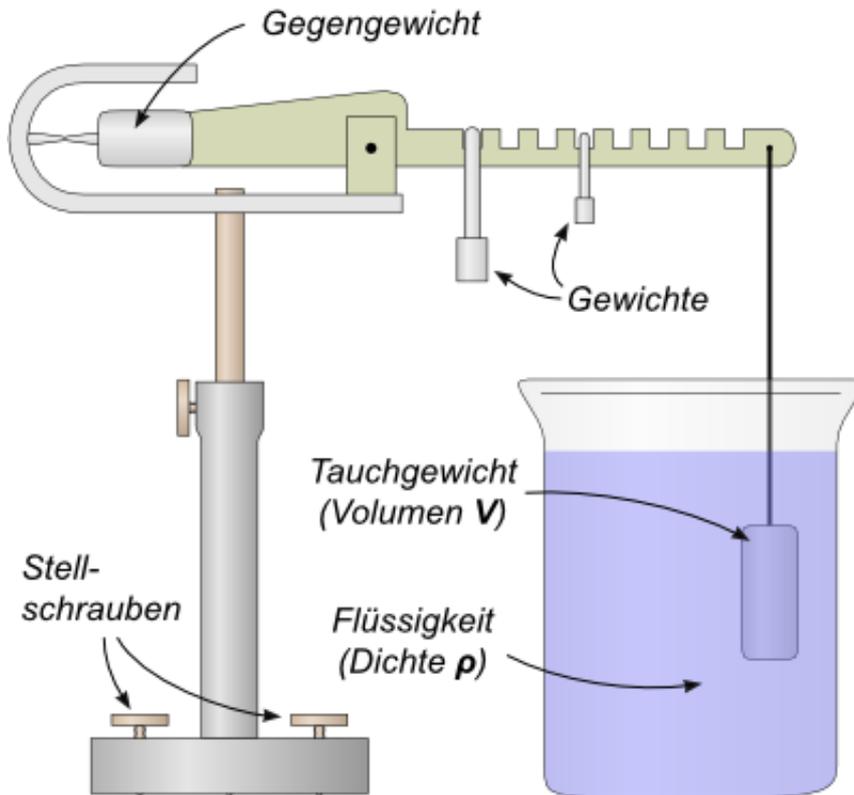
$$\sigma_{\text{DF}} = \frac{1}{2} \frac{h\rho g r}{\cos(\varphi)}. \quad (2.2.9)$$

Für einen Kontaktwinkel  $\theta > 90^\circ$  spricht man von einer Kapillardepression. Diese tritt beispielsweise bei der Versuchsdurchführung mit Quecksilber auf.



**Abbildung 4:** Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche unter dem Phänomen der Kapillarität in Kapillare mit Radius  $r$ ; aus [5]

## 2.3 Funktionsweise der Mohrschen Waage



**Abbildung 5:** Aufbau der MOHRschen Waage zur Veranschaulichung der Funktionsweise; aus [4]

Durch die Auftriebskraft des Körpers in der Flüssigkeit entsteht ein Drehmoment  $T_j^A$  zur Flüssigkeit  $j$ . Durch die angehängten Gewichte, zu sehen im Aufbau in Abbildung 5, entsteht ein Drehmoment  $T_j^G$ . Der Aufbau befindet sich in Waage, wenn sich die Kräfte im Gleichgewicht befinden, also

$$T_j^G = T_j^A, \quad (2.3.1)$$

wobei  $j \in \{1, 2\}$  die jeweilige betrachtete Flüssigkeit markiert.  $r$  ist der Abstand der Aufhängung des Körpers zur Drehachse der Waage. Dann folgt ein Verhältnis der wirkenden Kräfte zum Drehmoment von

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{T_1^G}{r}}{\frac{T_2^G}{r}} = \frac{T_1^G}{T_2^G}, \quad (2.3.2)$$

---

da ja  $T = F \cdot r$  das allgemeine Drehmoment beschreibt. Das Gesamtdrehmoment, das bei angehängten Gewichten in  $k$  Narben mit Gewicht  $m_{ij}$  pro Narbe und  $r_i$  als Abstand der Narbe  $i$  zur Drehachse entsteht, muss die Summe der Gewichtskräfte sein, sodass

$$T_j^G = g \cdot \sum_{i=1}^k m_{ij} \cdot r_i \quad (2.3.3)$$

gilt. Nach [6, S. 103] ist die Auftriebskraft mit archimedischen Prinzip

$$F_A = g \rho V \quad (2.3.4)$$

mit

- $\rho =$  Dichte der verdrängten Flüssigkeit  $i := \rho_i$ ,
- $V =$  Volumen der verdrängten Flüssigkeit.

Da Körper komplett eingetaucht, ist das Volumen gleich dem Volumen des Körpers, also  $V := V_K$ . Dann gilt:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\cancel{V_K} \cdot g \cdot \rho_1}{\cancel{V_K} \cdot g \cdot \rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{F_1}{F_2} \cdot \rho_2. \quad (2.3.5)$$

Über Gleichung 2.3.2 erhalten wir

$$\rho_1 = \frac{T_1^G}{T_2^G} \cdot \rho_2 = \frac{g \sum_{i_1=1}^{k_1} m_{i_1 1} \cdot r_{i_1}}{g \sum_{i_2=1}^{k_2} m_{i_2 2} \cdot r_{i_2}} \cdot \rho_2. \quad (2.3.6)$$

Der Abstand  $r_i$  ist über die Zahl der Kerbe multipliziert mit einem Abstand  $l$  zwischen zwei benachbarten Kerben gegeben:  $r_i = i \cdot l$ . Dann können wir schreiben:

$$\rho_1 = \frac{\sum_{i_1=1}^{k_1} m_{i_1 1} \cdot i_1 l}{\sum_{i_2=1}^{k_2} m_{i_2 2} \cdot i_2 l} \cdot \rho_2 \quad (2.3.7)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 = \frac{l \sum_{i_1=1}^{k_1} m_{i_1 1} \cdot i_1}{l \sum_{i_2=1}^{k_2} m_{i_2 2} \cdot i_2} \cdot \rho_2 \quad (2.3.8)$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 = \frac{\sum_{i_1=1}^{k_1} m_{i_1 1} \cdot i_1}{\sum_{i_2=1}^{k_2} m_{i_2 2} \cdot i_2} \cdot \rho_2. \quad (2.3.9)$$

---

## 2.4 Dynamische Viskosität

Beim Strom einer Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität  $\eta$  durch eine Kapillare mit dem Radius  $r$  kann der Volumendurchsatz  $\dot{V}$  (manchmal auch als  $Q$ ,  $I$  oder  $J_v$ ) durch das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE abgeändert<sup>3</sup> aus [6, S. 124] geschrieben werden als

$$\dot{V} = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p. \quad (2.4.1)$$

Dabei ergibt sich die Druckdifferenz  $\Delta p$  über den hydrostatischen Druck zu

$$\Delta p = \rho g \bar{h} = \rho g \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (2.4.2)$$

mit  $\bar{h}$  als mittlere Höhe nach Gleichung 6.1.1. Das Volumen, das aus einem Zylinder mit dem Radius  $R$  herausfließt, ergibt sich mit  $V = \pi R^2 h$  zu

$$V = \pi R^2 (h_1 - h_2). \quad (2.4.3)$$

Wir nähern  $\dot{V} \approx \frac{V}{t}$ . Das alles eingesetzt ergibt nach  $\eta$  umgestellt

$$\eta \approx \frac{\rho g t r^4}{16 l R^2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \quad (2.4.4)$$

in Abhängigkeit von der Auslaufzeit  $t$ , die von Nöten ist, damit sich der Zylinder von  $h_1$  bis  $h_2$  leert.

Für die Viskosität in Abhängigkeit von der Füllhöhe im Zylinder können wir den Umstand nutzen, dass die Änderung des Volumens nach der Zeit als Volumendurchsatz über

$$\dot{V} = -\pi R^2 \dot{h} \quad (2.4.5)$$

gegeben ist. Der Druck ist  $p = \rho g h$ . Beides in Gleichung 2.4.1 eingesetzt ergibt

$$-\pi R^2 \dot{h} = \frac{\pi \rho g h r^4}{8 \eta l}. \quad (2.4.6)$$

Nach der Viskosität umgestellt erhalten wir  $\eta$  in Abhängigkeit von  $h$  mit

$$\eta = -\frac{\rho g r^4}{8 R^2 l} \frac{h}{\dot{h}}. \quad (2.4.7)$$

---

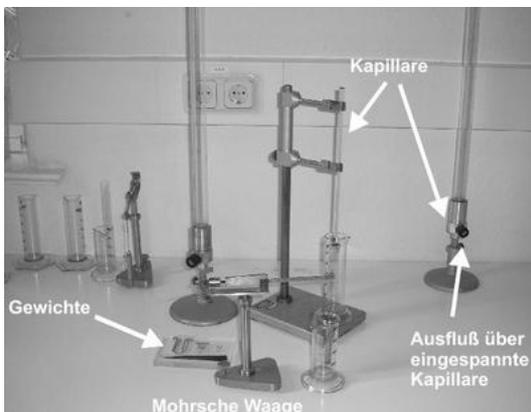
<sup>3</sup> $J_v := \dot{V}$ ;  $R := r$

---

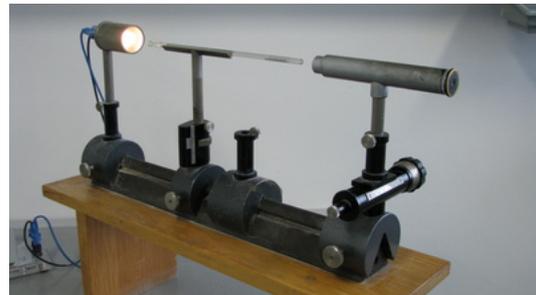
## 3 Durchführung

### 3.1 Aufbau

Für das Experiment werden drei verschiedene Kapillare verwendet, welche zu Beginn mit einem Messmikroskop vermessen werden müssen. Es ist auch darauf zu achten, die Kapillare vor Benutzung für das Experiment gründlich zu reinigen und zu trocknen, um Verunreinigungen, die die Messungen beeinflussen würden zu vermeiden. Beim Verwenden des Messmikroskopes ist darauf zu achten, dass beim Messen ein sogenannter "toter Gang" vermieden wird, indem während der Messung die Drehschraube nur in eine Richtung gedreht wird.



(a) Versuchsaufbau, mit Kapillaren und Mohrscher Waage



(b) Messmikroskop zum vermessen der Kapillare

Bei der Verwendung der Mohrschen Waage ist auch darauf zu achten, dass der Probekörper mit destilliertem Wasser zu reinigen und anschließend zu trocknen ist.

### 3.2 Experiment

Im ersten Teil des Versuchs werden nach einander mit allen drei Kapillaren Messungen an drei Verschiedenen Flüssigkeiten gemacht; destilliertem Wasser, Methanol und Ethylenglykol<sup>4</sup>. Für die Messung taucht man eins der Kapillare in eine der Flüssigkeiten und zieht dieses anschließend wieder bis an die Oberfläche heraus. Der Höhenunterschied der Flüssigkeit ist zu messen. Dies wird für jede Flüssigkeit mit jedem der Kapillaren drei mal gemessen. Zwischen den Messungen müssen die Kapillare getrocknet und bei Änderung der Flüssigkeit gründlich ausgewaschen werden.

---

<sup>4</sup>Methanol und Ethylenglykol werden bei Kontakt über die Haut aufgenommen, sind aber in kleinen Mengen unbedenklich. Kontakt mit Augen und Schleimhäuten ist trotzdem zu vermeiden.

---

Danach ist mit Hilfe der Mohrschen Waage die Dichte der drei Flüssigkeiten zu messen. Dafür wird der Probekörper in die Flüssigkeit gehängt und die Waage durch anhängen verschiedener Gewichte in dafür vorgesehenen Kerben ins Gleichgewicht gebracht. Der Probekörper muss dabei vollständig in der Flüssigkeit sein, und zwischendurch gesäubert und getrocknet werden, um Verunreinigungen zu vermeiden.

Für den letzten Teil des Versuches wird nur destilliertes Wasser verwendet. Das Glasgefäß aus 6a wird dafür verwendet. Das Volumen vom Marker 50 bis 45 ist zu bestimmen, und man misst die Ausflusszeit des Wassers für dieses Volumen für alle drei Kapillare. Zum Schluss wird nun die Ausflusszeit in Abhängigkeit der Höhe für das Kleinste der Kapillare bestimmt, durch 10 Messungen der Höhe und Zeit.

---

## 4 Auswertung

Zunächst muss für die gesamte Auswertung der Radius der Kapillare bestimmt werden. Die Messwerte sind "Ortsangaben", die mit dem Messmikroskop aufgezeichnet sind. Zwar ist die halbe Skalenbreite der Ortsangabe  $\sigma = 0,005$  mm, aber da die Kontur des inneren Kapillariums schwammig zu sehen war, nehmen wir einen vierfachen Fehler von  $\sigma_{1,2} = 0,02$  mm an. Der Fehler von  $d = \sigma_1 - \sigma_2$ , mit 1 und 2 als beide Ortsangaben, ergibt sich dann mit Gleichung 6.1.5 zu

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (4.0.1)$$

Anschließend ist das arithmetische Mittel nach Gleichung 6.1.1 der drei Differenzen von drei Messwertpaaren pro Kapillare zu bilden. Jeder Messwert hat denselben Fehler, weshalb der entgültige Fehler noch mit der Student-t-Verteilung mit 1,32 zu multiplizieren ist, da wir dreifache Messwerte für dieselbe Größe haben. Für Student-t wollen wir nur eine 1- $\sigma$ -Umgebung.

Den mittleren Durchmesser mit Fehler durch 2 zu teilen, ergibt den Radius. Wie sich jedoch herausstellt, sind die Radien der Kapillare dermaßen fehlerhaft, dass es sich nicht sinnvoll gestaltet, die daraus folgenden Werte zu betrachten. Ein Vergleich mit anderen Werten für dieselben Gefäße bestätigt das. Darauf soll näher in Unterabschnitt 5.2 eingegangen werden. In der folgenden Auswertung benutzen wir Werte **anderer Teilnehmer:innen des Versuchs, nicht die eigenen** am Versuchstag genommenen Werte. Dieser Unterschied bezieht sich einzig auf die Kapillarradien. Die Ergebnisse für die Radien der Kapillare sind in Tabelle 1 aufgelistet. Zur Veranschaulichung sind die  $\sigma$ -Umgebungen der fehlerhaften, aus unseren Werten berechneten Radien zu denen, die weiter benutzt werden, angegeben.

Farbe Kapillar	richtiger Radius in mm	fehlerhafter Radius in mm	$\sigma$ -Umgebung
Grün	$0,885 \pm 0,015$	$0,957 \pm 0,015$	5
Blau	$0,608 \pm 0,015$	$0,137 \pm 0,015$	32
Rot	$0,402 \pm 0,015$	$0,047 \pm 0,015$	24

**Tabelle 1:** Radien der Kapillare bestimmt als Mittelwert von drei Messungen pro Kapillar, mit Fehler; die als "richtige[-]"Radien bezeichneten Ergebnisse werden fortlaufend verwendet

---

## 4.1 Oberflächenspannung

Die Dichte wurde bestimmt durch Gleichung 2.3.9, wobei zu beachten ist, dass sich alle fehlerbehafteten Größen aus der Gleichung rauskürzen. Demnach ist die Oberflächenspannung fehlerfrei angegeben, da sich bei Gleichung 6.1.5 ein Fehler von Null ergeben würde. Für die Oberflächenspannungen ergibt das nach Gleichung 2.2.6 dann die Werte in Tabelle 2.

Flüssigkeit	Dichte in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Oberflächenspannung in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Fehler in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$
dest. Wasser	998	0,053	$\pm 0,005$
Methanol	1089,246	0,029	$\pm 0,003$
Ethylenglykol	826,914	0,033	$\pm 0,003$

**Tabelle 2:** Dichte und Oberflächenspannungen mit Fehler der Flüssigkeiten

Dabei wurde der Fehler berechnet nach Gleichung 6.1.5 mit

$$\sigma_O = \sqrt{\sigma_r^2 \cdot \left(\frac{1}{2}h\rho g\right)^2}. \quad (4.1.1)$$

## 4.2 Dynamische Viskosität von dest. Wasser abhängig von Auslaufzeit

Im Folgenden soll die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser aus der Auslaufzeit bestimmt werden, welche die Wassersäule benötigt, um von der Höhenmarkierung von 50 cm auf 45 cm zu kommen. Die Zeit wurde mit einer Stoppuhr gemessen. Der Fehler dafür ist

$$\sigma_{t, \text{sys}} = \text{kleinster Skalenswert} + 0,005 \cdot t \quad (4.2.1)$$

mit  $t$  als Messwert.  $\sigma_{t, \text{stat}}$  ist Reaktionszeit des Stoppuhrbedienenden. Mit Gleichung 6.1.4 ergibt sich der Gesamtfehler

$$\sigma_{t, \text{ges}} = \sqrt{(0,01 \text{ s} + 0,005 \cdot t)^2 + (0,27 \text{ s})^2}. \quad (4.2.2)$$

Die Höhen  $h_1$  und  $h_2$  werden als fehlerfrei angenommen, da die Zeitmessung an diesen beiden Angaben ausgerichtet werden soll. Eine Abweichung der Wassersäulenhöhe zum zu messenden Zeitpunkt  $t$  ist bereits in dem Fehler der Zeit mit einbegriffen.

Die Dichte von Wasser  $\rho$  werden wie in Tabelle 2 mit  $998 \text{ kg m}^{-3}$  und die Erdbeschleunigung  $g$  mit  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  als exakt angenommen. Für den Radius  $R$  des befüllten Zylinders misst man den Durchmesser und teilt den Wert durch 2. Da man das Lineal nicht genau anlegen kann, ist für den Durchmesser der Fehler  $\sigma = 1 \text{ mm}$ , sodass  $\sigma_R = 0,0005 \text{ m}$ . Die dyn. Viskosität wird berechnet mit Gleichung 2.4.4, hier noch einmal rekapituliert:

$$\eta \approx \frac{\rho g t r^4}{16 l R^2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}.$$

Für jede Kapillare sind die errechneten Werte der Viskosität  $\eta$  in Tabelle 3

Farbe Kapillare	Radius $r$ in mm	dyn. Viskosität $\eta$ in Pa s
Grün	$0,885 \pm 0,015$	$0,0016 \pm 0,0002$
Blau	$0,608 \pm 0,015$	$0,00128 \pm 0,00018$
Rot	$0,402 \pm 0,015$	$0,00014 \pm 0,00014$

**Tabelle 3:** dynamische Viskosität für jede Kapillare mit Radien, berechnet aus den Durchmesser der anderen Versuchsgruppe

Der Fehler wurde berechnet nach Gleichung 6.1.5:

$$\sigma_\eta = \left( \sigma_t^2 \left( \frac{\rho g r^4}{16 l R^2} \mu \right)^2 + \sigma_r^2 \left( \frac{\rho g t r^3}{4 l R^2} \mu \right)^2 + \sigma_l^2 \left( \frac{\rho g t r^4}{16 l^2 R^2} \mu \right)^2 + \sigma_R^2 \left( \frac{\rho g t r^4}{8 l R^3} \mu \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.3)$$

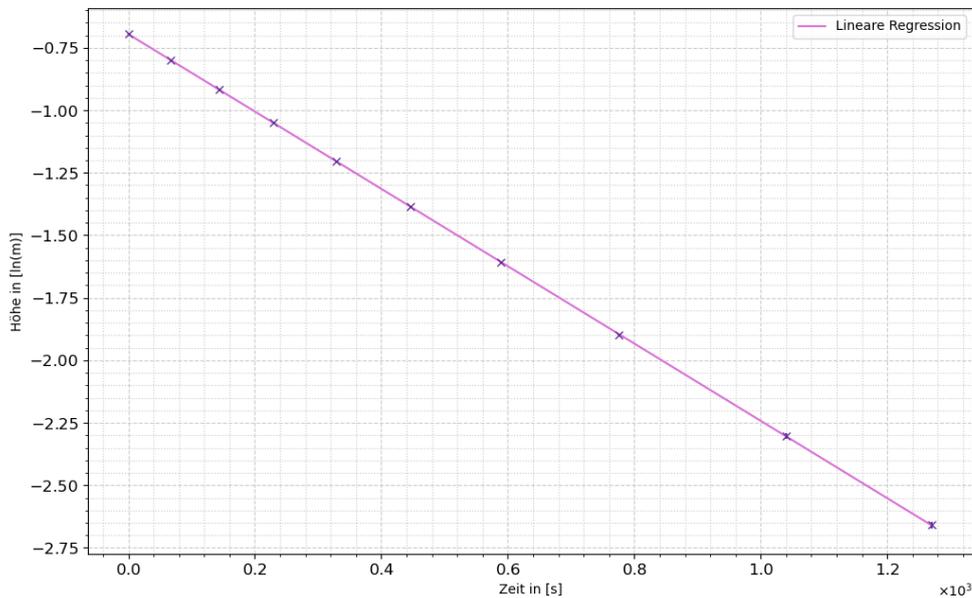
mit  $\mu := \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}$ . Die Viskositäten für jede Kapillare werden noch mit dem gewichteten Mittelwert nach Gleichung 6.1.2 und seinem Fehler nach Gleichung 6.1.3 gemittelt. Das ergibt

$$\underline{\underline{\eta_{\text{H}_2\text{O}, t} = (0,0011 \pm 0,0001) \text{ Pa s.}}}$$

### 4.3 Dynamische Viskosität von destilliertem Wasser durch Abhängigkeit der Auslaufzeit zum Wasserstand

In Abbildung 6 ist die Höhe des Wassers im Glaszylinder logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen. Das bedeutet, dass für die Steigung gilt:

$$m = \frac{d}{dt} \ln h(t) = \frac{\dot{h}}{h} \quad (4.3.1)$$



**Abbildung 6:** Höhe des Wassers in Metern logarithmisch aufgetragen gegen die Zeit in Sekunden, mit Fehlern, sowie linearer Regression nach Python

Mit Gleichung 2.4.7 folgt dann, dass für die Viskosität  $\eta$  gilt:

$$\eta = -\frac{r^4 \rho g}{8R^2 l m} \quad (4.3.2)$$

Damit erhalten wir den Wert  $\eta = 0,00081 \pm 0,00012 Pa \cdot s$  für die Viskosität, wobei der Fehler nach Gleichung 6.1.5 berechnet wurde mit

$$\sigma_\eta = \sqrt{\sigma_r^2 \left( \frac{r^3 \rho g}{2R^2 l m} \right)^2 + \sigma_R^2 \left( \frac{\rho g r^4}{8R^3 l m} \right)^2 + \sigma_l^2 \left( \frac{r^4 \rho g}{8R^2 l^2 m} \right)^2 + \sigma_m^2 \left( \frac{r^4 \rho g}{8R^2 l m^2} \right)^2} \quad (4.3.3)$$

---

## 5 Diskussion

### 5.1 Werte berechnet mit "richtigem" Radius

Destilliertes Wasser hat bei 20°C eine Oberflächenspannung von  $72,75 \frac{\text{mN}}{\text{m}} = 0,07275 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , das gibt ein 4- $\sigma$ -Intervall des Werts aus Tabelle 2. Für die Oberflächenspannungen von Methanol und Ethylenglykol<sup>5</sup> ist die Oberflächenspannung bei 20°C gegeben als 22,6 mN/m = 0,0226 N/m und 31,4 mN/m = 0,0314 N/m, was mit den errechneten Werten ein 3- $\sigma$ -Intervall, bzw ein 1- $\sigma$ -Intervall gibt. Diese Werte sind damit etwa im erwarteten Bereich, da am Tag des Versuches die Kapillare nicht vernünftig gereinigt und getrocknet werden konnten. Es war nur auswaschen mit destilliertem Wasser, mit anschließendem Trocknen an der Luft möglich, was einige Ungenauigkeiten in den Messungen erklären würde. Dafür ist tatsächlich das 1- $\sigma$ -Intervall bei Ethylenglykol besser als erwartet.

Die Viskosität von destilliertem Wasser wurde auf zwei verschiedene Arten bestimmt. Mit der Gebrauchsformel nach [9]

$$\eta_{\text{H}_2\text{O}, T} \approx \frac{1}{0,1T^2 - 34,335 \cdot T + 2472} \quad (5.1.1)$$

kann man die Viskosität in Abhängigkeit der Wassertemperatur errechnen.

Dabei ist zu beachten, dass die Einheit der Temperatur [T] = K, also SI-Einheit Kelvin, gefordert ist. Die Umrechnung gestaltet sich durch  $T^{\text{K}} = 273,15 \text{ K} + T^{\text{°C}}$ , da die Einheit Kelvin 0 beim absoluten Nullpunkt hat, was  $-273,15 \text{ °C}$  entspricht, Einheit °C bei Gefrierpunkt von Wasser. Die Viskosität der Gebrauchsformel wird in Einheit Pa s ausgegeben. Danach erwarten wir bei einer Wassertemperatur von  $(23 \pm 0,5) \text{ °C}$  eine Viskosität von

$$\eta_{\text{H}_2\text{O}, 23 \text{ °C}} \approx (0,000931 \pm 0,000011) \text{ Pa s.}$$

mit einem Fehler nach Gleichung 6.1.5

$$\sigma_{\eta, \text{theo}} = \sigma_{\text{H}_2\text{O}, 23 \text{ °C}} \cdot \left| \frac{0,2T - 34,335}{(0,1T^2 - 34,335 \cdot T + 2472)^2} \right|. \quad (5.1.2)$$

Für die Viskosität nach der Auslaufzeit liegt der theoretische Wert im 2- $\sigma$ -Intervall. Der in Abhängigkeit von der Wasserhöhe bestimmte Werte der Viskosität von destilliertem Wasser ist ebenfalls in einem 2- $\sigma$ -Intervall zum erwarteten Wert. Diese Fehlerintervalle sind so klein, dass sie keiner weiteren Erläuterung bedarfen.

---

<sup>5</sup>Die Werte für die Oberflächenspannung sind aus [2].

## 5.2 Werte berechnet mit "falschem" Radius

Bereits nach dem Bestimmen der Durchmesser war durch einen Vergleich des berechneten Werts zum roten Kapillar mit bloßem Auge klar, dass ein Messfehler vorliegen muss. Dies ist nicht nur durch andere Gruppen bestätigt, sondern auch anhand der  $\sigma$ -Intervalle der daraus resultierenden Rechnungen sichtbar (siehe Tabelle 5). In der Oberflächenspannung ist dieser Fehler dabei vergleichsweise klein, da sich der Radius nur einfach auf die Rechnung auswirkt, anders als bei der Viskosität, wo er mit dem Faktor  $r^4$  eingeht. Dazu kommt, dass die gemessenen Werte für das blaue und grüne Kapillar näher an den "richtigen" Werten liegen als der Radius des "Roten". Dies bedeutet auch, dass die mit den "falschen" Messwerten bestimmten Oberflächenspannungen noch recht nah an den erwarteten Werten liegen, da diese für alle drei Kapillare bestimmt und dann gemittelt wird, sodass der "rote" Wert sich weniger stark auswirkt. So erhält man mit den "falschen" Messwerten folgende Ergebnisse für die Oberflächenspannung, mit Fehler:

Flüssigkeit	Oberflächenspannung mit Fehler	Sigma-Intervall	"rote" Kapillare
dest. Wasser	$(0,023 \pm 0,005) \text{ Nm}^{-1}$	10	$0,006 \text{ Nm}^{-1}$
Methanol	$(0,014 \pm 0,003) \text{ Nm}^{-1}$	3	$0,004 \text{ Nm}^{-1}$
Ethylenglykol	$(0,015 \pm 0,003) \text{ Nm}^{-1}$	1	$0,004 \text{ Nm}^{-1}$

**Tabelle 4:** Gewichteter Mittelwert der Oberflächenspannungen bestimmt mit den "falschen" Werten der Radien gemessen am Tag des Versuchs, mit Fehler und  $\sigma$ -Intervall zum erwarteten Wert aus Unterabschnitt 5.1, sowie zum Vergleich die Werte bestimmt nur für "Rot"

In den Werten der Viskosität ist die Auswirkung der "falschen" Messwerte wie erwartet deutlich stärker ausgefallen. Für die Viskosität nach der Zeit erhalten wir mit den falschen Kapillarradien

Kapillare	Viskosität in Pa s	Sigma-Intervall
Grün	$(21,6 \pm 2,7) 10^{-4}$	5
Blau	$(3,3 \pm 1,5) 10^{-6}$	619
Rot	$(1,5 \pm 1,9) 10^{-7}$	4900

**Tabelle 5:** Viskositäten aus Messwerten für verschiedene Radien. Da die Viskosität eine Stoffeigenschaft des Wassers ist, ist sie nicht abhängig vom Kapillarradius. Die Sigma-Intervalle zu dem theoretischen Wert in Unterabschnitt 5.1 stehen neben den Kapillaren

Der gewichtete Mittelwert beläuft sich dann auf

$$(2 \pm 1,9) 10^{-7} \text{ Pa s.}$$

Das ergibt ein Fehlerintervall von  $4899 \sigma$ .

---

Mit einem wie in Unterabschnitt 4.3 berechneten Wert folgt  $\eta = (1,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-7}$ , was ein 10343- $\sigma$ -Intervall zum Vergleichswert aus Unterabschnitt 5.1 gibt.

Es ist klar zu erkennen, dass der Kapillarradius der "roten" Kapillare mit dem Fehler am stärksten abweicht von den Theoriewerten. Das liegt an besagtem Exponenten 4, mit dem der Radius in die Formel Gleichung 2.4.4 eingeht. Kleinere Werte verursachen demnach auch eine stärkere Auswirkungen in den berechneten Ergebnissen.

Eine mögliche Erklärung wäre, dass sich zwischen den einzelnen Messungen für die Kapillaren eine Feststellschraube gelöst hat oder der Aufbau des Messmikroskops in 6b durch ungewollte Berührung andersweitig beeinflusst wurde. Dafür spricht, dass die Abweichung von der grünen Kapillare, sowohl in Tabelle 1 als auch in Tabelle 5, nur 5  $\sigma$  beträgt, während jene von blau und rot deutlich höher ausfallen, sodass zwischen der Messung der grünen und der blauen Kapillare besagter Fehler in den Aufbau gekommen sein könnte.

---

## 6 Anhang

### 6.1 Fehlerformeln

Formeln für die Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.1.1)$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.1.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.1.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.1.4)$$

---

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe  $f$ , die von den zu bestimmenden Größen  $A$  und  $B$  abhängt, kann um weitere Variablen  $C, D, E$  usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right)^2 + \left(\sigma_B \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right)^2} \quad (6.1.5)$$

Lineare Regression; die Steigung  $m$  und der Achsenabschnitt  $b$  den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.1.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.1.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.1.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.1.9)$$

---

## Literatur

- [1] *Grüne Reihe: Ökologie: Schülerband*. Schroedel Verlag GmbH, 1. edition, 2013.
- [2] Chemie.de. Oberflächenspannung, 1997-2023. <https://www.chemie.de/lexikon/Oberfl%C3%A4chenspannung.html>, last access: 08.06.23.
- [3] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme*. Springer Spektrum, 8. edition, 2018.
- [4] Lehrportal Uni Göttingen. Praktikum zu Experimentalphysik II: 11 - Kapillarität und Viskosität, 2020. <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3638>, last access: 30.05.23.
- [5] R. Matzdorf. Kapillarität, 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=pMcxvduSmw8>, last access: 31.05.23.
- [6] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 25. edition, 2015.
- [7] Roland.chem. Wasserstoffbrückenbindung, 2013. <https://de.wikipedia.org/wiki/Wasserstoffbrckenbindung>, last access: 04.06.23.
- [8] Joachim Herz Stiftung. Dipol-Dipol Wechselwirkungen, 2023. <https://www.leifichemie.de/allgemeine-chemie/wechselwirkungen/grundwissen/dipol-dipol-wechselwirkungen>, last access: 31.05.23.
- [9] tec science. Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen, 2020. <https://www.tec-science.com/de/mechanik/gase-und-fluessigkeiten/viskositat-von-fluessigkeiten-und-gasen/>, last access: 07.06.23.

---

## Abbildungsverzeichnis

1	Abbildung zur Veranschaulichung der Wasserversorgung von Bäumen; aus [1] . . . . .	3
2	Aufbau eines Wassermoleküls mit Dipolstruktur; zu sehen ist, wie die Bindungselektronen durch das Sauerstoffatom stärker angezogen werden; aus [8] . . . . .	5
3	Veranschaulichung zur Wasserstoffbrücke; die beteiligten Molekülteile sind blau gekennzeichnet, die eigentliche Brücke ist gepunktet; aus [7] . . . . .	5
4	Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche unter dem Phänomen der Kapillarität in Kapillare mit Radius $r$ ; aus [5] . . . . .	7
5	Aufbau der MOHRschen Waage zur Veranschaulichung der Funktionsweise; aus [4] . . . . .	8
6	Höhe des Wassers in Metern logarithmisch aufgetragen gegen die Zeit in Sekunden, mit Fehlern, sowie linearer Regression nach Python . . . . .	16