

ANFÄNGERPRAKTIKUM DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK,
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

Versuch 4
Diffusion

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:

Datum der Durchführung: 24.01.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	5
3	Durchführung	7
3.1	Aufbau	7
3.2	Experiment	7
4	Auswertung	9
4.1	Teil 1: Diffusionskurven	9
4.2	Teil 2: konstante Konzentration	10
4.3	Teil 3: konstante Zeit	12
5	Diskussion	13
6	Anhang	14
6.1	Fehlerformeln	14
	Literatur	16

1 Einleitung

Wenn man Mittagessen zubereitet und sich nach dem Kochen endlich an den Esstisch setzen kann, um das Gericht zu kosten, möchte man nicht nochmal aufstehen, um noch etwas nachzubereiten, wenn man zu wenig gemacht hat, und hungrig bleiben will ja auch keiner. Darum neigt man dazu, eher zu viel Essen zuzubereiten, als man in bei einer Mahlzeit essen würde. Wer schon mal Salat mit Dressing gemacht hat und davon etwas übrig hatte - aus genanntem Grund, der käme auf die Idee, den Salat für das Abendbrot stehenzulassen. Doch das ist allgemein kein guter Plan.

Beim Schneiden des Salats sind die Salatblätter noch knackig, weil die Vakuolen in den Pflanzenzellen mit Wasser gefüllt sind. Gibt man die Blätter nun in ein würziges Dressing, herrscht ein Konzentrationsunterschied an Gewürzen, z.B. Na^+ - und Cl^- -Ionen von gelöstem Kochsalz, zwischen der umgebenden Flüssigkeit - Wasser, Essig und Öl im Dressing (hyperton)- und dem Zellinneren, das hauptsächlich aus Wasser besteht und durch die Zellmembran abgegrenzt wird (hypoton).

Biomembranen sind semipermeabel. Das bedeutet, dass sie nur bestimmte Stoffe wie Wasser und Sauerstoffmoleküle durchlassen, während größere Moleküle wie Glukose oder Ionen wie Natrium durch Kanäle in das Zellinnere gelangen. Statt dass die Gewürzpartikel aus dem Salatdressing nun durch komplexe Mechanismen in das Zellinnere gelangen, strömt das Wasser aus den Pflanzenzellen nun in die Umgebungsflüssigkeit. Dieser Vorgang heißt Osmose. Sie ist eine Sonderform der Diffusion, wo Konzentrationsunterschiede nicht durch Umverteilung gelöster Stoffe, sondern Strömung des Lösungssubstrates ausgeglichen werden. Lässt man also den Salat bis zum Abend stehen, werden die Blätter matschig und damit nicht mehr genießbar. Dieser Vorgang kann in Abbildung 1 nachvollzogen werden.

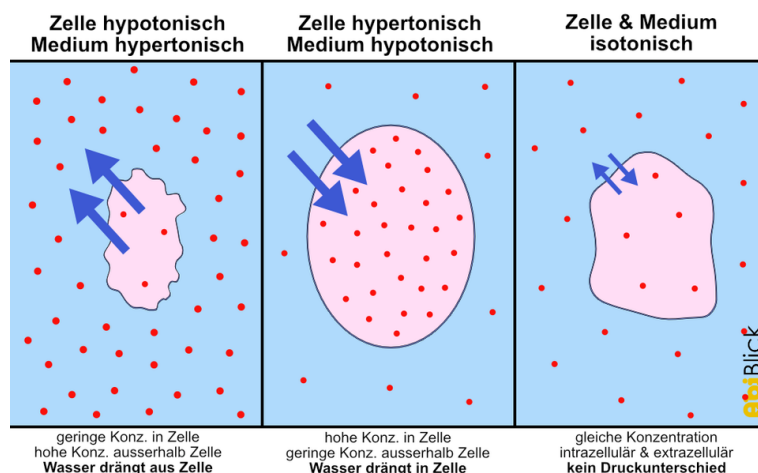


Abbildung 1: schematische Darstellung einer beliebigen Zelle ohne Vakuole, die nur in pflanzlichen Zellen vorkommt, unter osmotischen Drücken; Grafik aus [1]

Diffusion ist der durch die Brown'sche Eigenbewegung von Molekülen verursachte Ausgleich eben dieser Konzentrationsunterschiede durch gleichmäßige Durchmischung der Stoffe, wofür keine Energie benötigt wird. Dieser Vorgang soll anhand von Wasser und Methylenblau in diesem Experiment untersucht werden, wobei die Konzentration des Methylenblaus in Abhängigkeit von der Zeit und Ort betrachtet und die Diffusionskonstante D bestimmt wird.

Neben Abhandlungen zum Zubereiten von grünem Salat hat Diffusion als Transportphänomen eine große Bedeutung für eine Vielzahl von (insbesondere bio-) physikalischen Vorgängen.

2 Theorie

Bei dem angesprochenen Ausgleich von Konzentrationsunterschieden aufgrund eines Ungleichgewichts handelt es sich um einen Transportprozess. Dafür wird der Fluss einer transportierten Größe durch eine zur Flussachse x senkrechten Fläche F untersucht. Es handelt sich dabei entweder um Materiefluss j_{m_i} der einzelnen Massenkompone-
te i , Energiefluss J_E oder Impulsfluss j_P , wobei es sich bei Diffusion offenkundig um Materiefluss gegeben durch

$$j_{m_i} := \frac{c(x, t)}{dt} = -D \left(\text{grad} \frac{\mu_i}{T} \right) \quad (2.1)$$

nach [3, S. 1238] handelt. Hier ist c die Teilchendichte, x der Weg, den die diffundierende Flüssigkeit zurückgelegt, D die Diffusionskonstante als Maß für die Diffusionsgeschwindigkeit und μ_i das chemische Potential. Die räumliche Änderung der Dichte ist $\frac{dc}{dx}$, die sich proportional zu dem Massenfluss j_m verhält. Mit Gleichung 2.1 erhält man

$$j_n = -D \frac{dc}{dx}. \quad (2.2)$$

Hierbei handelt es sich um das Erste FICKSche Diffusionsgesetz ([3, S. 1240]).

Indem man die Änderung von der Zeit der Teilchendichte in einem Volumen, das durch A begrenzt wird und die Dicke dx hat, betrachtet, die sich durch die Differenz des Massenflusses j_m an den Grenzschichten wie folgt darstellt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c A dx) = A j_m(x) - A j_m(x + dx), \quad (2.3)$$

verbildlicht in Abbildung 2, kann man durch eine lineare Näherung analog zur Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{d}{dx} j_n(x) \quad (2.4)$$

erhalten. Gleichung 2.2 einsetzen führt auf das Zweite FICKSche Diffusionsgesetz aus [3, S. 1242]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung wird auch als allgemeine Diffusionsgleichung bezeichnet und ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

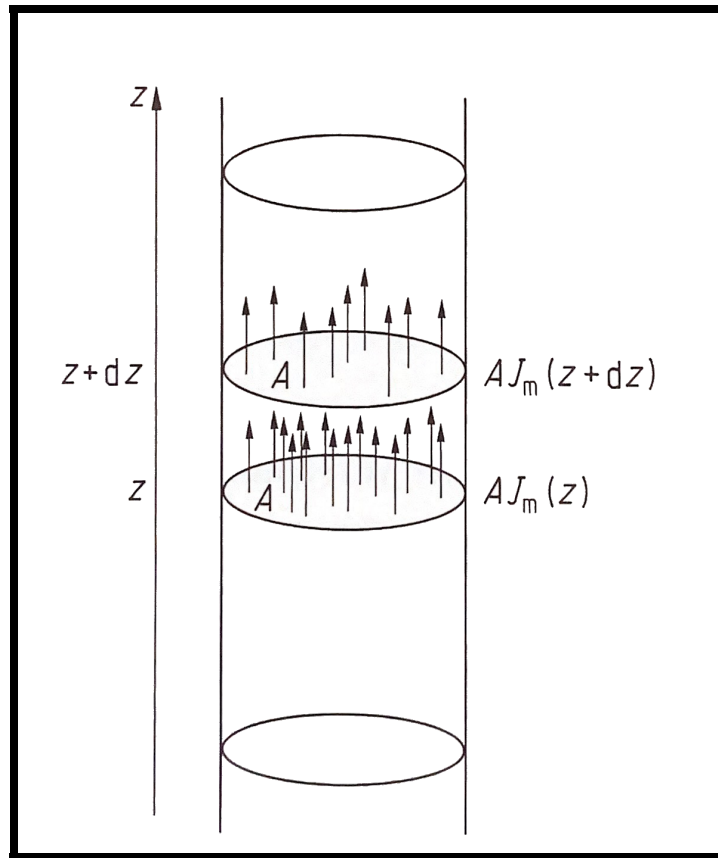


Abbildung 2: Skizze zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung für c aus [3, 1241], die wiederum für die Zweite FICKSche Diffusionsgleichung benötigt wird; betrachte $z = x$ isomorph

Die Anfangsbedingungen sind zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\begin{aligned} c(x = 0) &= c_0, \\ c(x > 0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

weil wir davon ausgehen, dass jenseits des reinen Methylenblaus bisher nur Wasser und die Übergangsschicht unendlich klein ist. Analytisch kann die Lösung der DGL über eine Fourier-Transformation nach [2, S. 722] berechnet werden. Die Lösung ist

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]. \tag{2.7}$$

x ist die Diffusionsstrecke, t die Zeit, D wie erwähnt die Diffusionskonstante mit $[D] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. erf ist die GAUSSSche Fehlerfunktion nach [3, S. 1243]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-v^2) dv. \tag{2.8}$$

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Der Versuch besteht aus den in Abbildung 3 dargestellten Bestandteilen, diese sind dabei wie folgt aufgebaut:

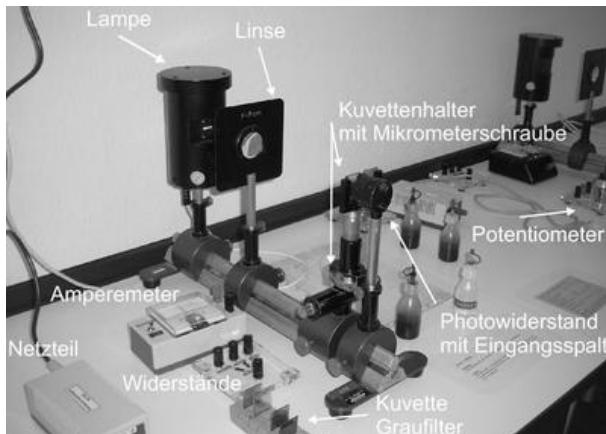


Abbildung 3: Versuchsaufbau

werden, um Verunreinigungen, welche die Messergebnisse beeinflussen würden, zum Beispiel durch Methylenblau-Rückstände, zu vermeiden. Am besten ist es hierfür, destilliertes Wasser zu verwenden.

Es werden außerdem benötigt: Methylenblaulösung der Konzentration c_0 , destilliertes Wasser, zwei Stoppuhren und Graufilter entsprechend der Konzentration $c_0/2$, $c_0/4$, $c_0/8$, $c_0/16$ und $c_0/32$ der Methylenblaulösung.

3.2 Experiment

Zunächst wird die Messbrücke für den in der aktuellen Messung zu betrachtenden Graufilter eingestellt, indem der entsprechende Filter in den Kuvettenhalter eingespannt wird. Nun wird der justierbare Messwiderstand so eingestellt, dass das Amperemeter keinen Stromfluss anzeigt.

Für die erste Messreihe wird der Graufilter $c_0/16$ verwendet, um den Verlauf von einem Sechzehntel der Konzentration der Methylenblaulösung zu messen. Die erste Kuvette (im Folgenden Kuvette 1 genannt) wird zu $3/4$ mit destilliertem Wasser gefüllt und darauf werden ein bis zwei Tropfen Methylenblaulösung gegeben. Dann wird Kuvette 1 in den Kuvettenhalter eingespannt und für 30 Minuten wird alle 30 Sekunden der Ort x gemessen, an dem die Konzentration in der Kuvette der des benutzten Graufilters, $c_0/16$, entspricht. Die Zeitmessung wird durch eine Stoppuhr vorgenommen, welche nach diesem Teil des Versuchs für eine spätere Messung weiterlaufen gelassen.

Für die zweite Messreihe wird nun der Graufilter $c_0/32$ verwendet zur Messung des Verlaufs von einem 32-tel der Konzentration der Methylenblaulösung. Es ist zu beachten, dass die Messbrücke hierbei nach obigen Anweisungen wieder zu kalibrieren ist. Küvette 2 wird nun genau wie Küvette 1 mit destilliertem Wasser und der Lösung befüllt und in die Halterung eingespannt. Eine zweite Stoppuhr wird verwendet, um die Zeit für die Messungen bei Küvette 2 zu nehmen; auch hier wird für 30 Minuten alle 30 Sekunden die Position der Konzentration, die dem Graufilter entspricht, abgelesen. Auch hier wird die Stoppuhr anschließend weiterlaufen gelassen.

Für die dritte Messreihe wird wieder Küvette 2 betrachtet. Es ist aber bis etwa 40 Minuten nach Beginn von Messreihe 2 zu warten. Es soll hierfür das gesamte Konzentrationsprofil in Küvette 2 gemessen werden. Dafür ist die Messbrücke mithilfe des jeweiligen Graufilters auf eine Konzentration einzustellen und dann die Position dieser in Küvette 2 zu messen. Dies soll einmal in aufsteigender Reihenfolge der Konzentrationen passieren und dann in absteigender Reihenfolge wiederholt werden. Die Gesamtzeit, die für diese Messung benötigt wurde, ist an der Stoppuhr abzulesen und zu notieren.

Die vierte und letzte Messreihe soll etwa 100 Minuten nach Beginn der ersten Messreihe gestartet werden (Zeit an der ersten Stoppuhr ablesen). Es wird auf dieselbe Art wie in der dritten Messreihe das Konzentrationsprofil in der Küvette 1 gemessen. Auch hier sind wieder auf- und absteigende Messungen zu nehmen und die Zeit, welche für die gesamte Messung benötigt wurde, zu notieren.

4 Auswertung

4.1 Teil 1: Diffusionskurven

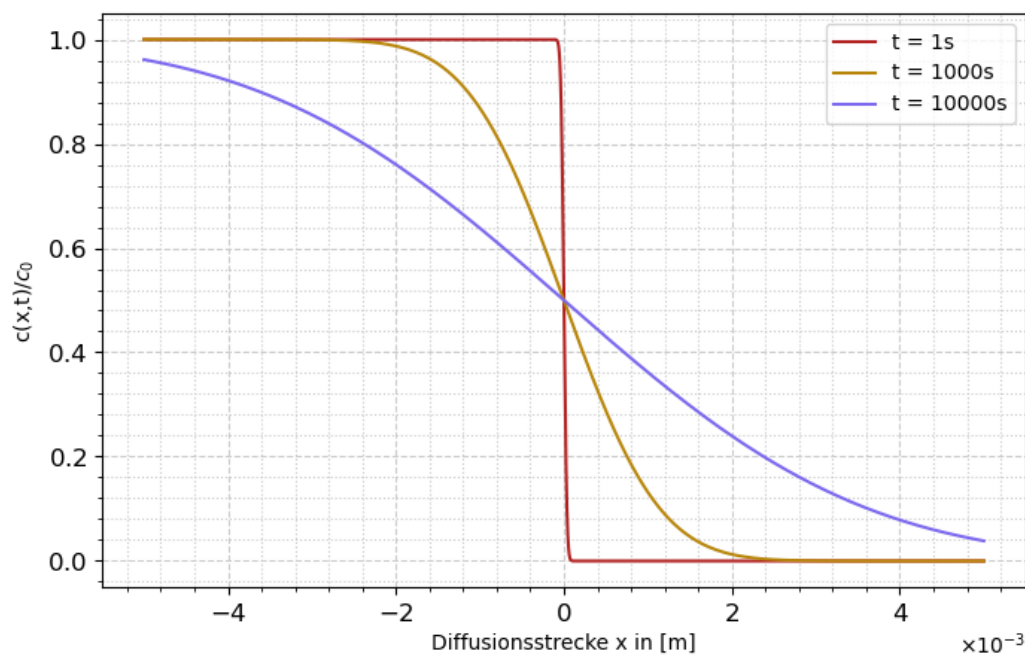


Abbildung 4: Diffusionskurven nach Gleichung 2.7 für verschiedene Zeiten t ; dabei wurde angenommen, dass $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ ist

In Abbildung 4 sind beispielhaft für verschiedene Zeiten t die Diffusionskurven nach Gleichung 2.7 berechnet und eingezeichnet.

Bei Messung 1 und 2 wurde der zeitliche Verlauf des Ortes einer bestimmten Konzentration gemessen. Auf der Graphik würde dies einer Bewegung parallel zu x-Achse entsprechen, also entlang einer konstanten Konzentration.

Für Messung 3 und 4 wurde das Konzentrationsprofil für eine als konstant angenommene Zeit gemessen, demnach entspricht dies einer Bewegung entlang einer der eingezeichneten Funktionen.

4.2 Teil 2: konstante Konzentration

In Abbildung 5 wurden die Messungen der Diffusionsstrecke aus Messreihe 1 und 2 quadriert und dann gegen die Zeit aufgetragen. Mithilfe von linearer Regression durch Python nach Gleichung 6.9 wurden entsprechende lineare Funktionen über die Messpunkte gelegt.

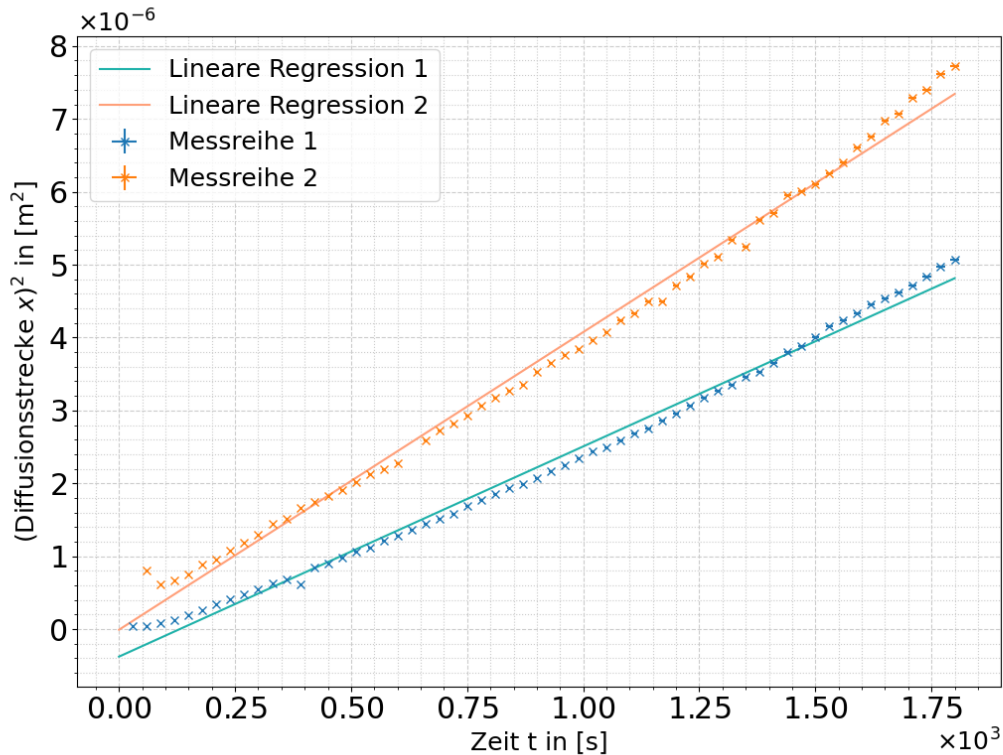


Abbildung 5: Quadrat der Diffusionsstrecke x^2 aufgetragen gegen die Zeit t , für Messreihe 1 mit dem Filter $c_0/16$ (blau) und Messreihe 2 mit dem Filter $c_0/32$ (orange); lineare Regression durch die Messwerte

Die Steigung dieser linearen Funktionen ist für Messreihe 1: $m_1 = (2,88 \pm 0,04) \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, und für Messreihe 2: $m_2 = (4,08 \pm 0,05) \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Mit Gleichung 2.7 kann man nun diese konstante Steigung genauer betrachten. Am Beispiel von der Konzentration $c = \frac{c_0}{16}$ gibt dies

$$\frac{c_0}{16} = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (4.1)$$

Stellt man diese Gleichung um, erhält man

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = 0,875. \quad (4.2)$$

Die Umkehrfunktion der Fehlerfunktion erf wurde über Python ermittelt und damit ergibt sich schließlich

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \approx 1,08. \quad (4.3)$$

Stellt man diese Gleichung schließlich nach D um, erkennt man, warum die Steigung der Funktionen in Abbildung 5 konstant ist:

$$D_{16} = 0,21 \cdot \frac{x^2}{t}. \quad (4.4)$$

und da $\frac{x_1^2}{t} = m_1$ gilt, folgt

$$D_{16} = 0,21 \cdot (2,88 \pm 0,04) \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = (5,880 \pm 0,084) \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Für D_{32} erhält man auf dem selben Weg den Faktor 0,14, also

$$D_{32} = 0,14 \cdot (4,08 \pm 0,05) \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = (5,712 \pm 0,070) \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Der Fehler von D ergibt sich aus dem Fehler der Steigung über Gleichung 6.5 mit

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_m^2 \cdot \text{Konstante}^2}. \quad (4.5)$$

4.3 Teil 3: konstante Zeit

In Abbildung 6 sind die Daten aus Messreihe 3 und 4 sowie zum Vergleich die entsprechenden Kurven der Konzentration aufgetragen. Dafür wurde jeweils eine Kurve zur Zeit des Anfangs der Messung und eine zur Zeit des Endes der Messung genommen. Hier würde man erwarten, dass die Messpunkte innerhalb, oder zumindest nahe bei den berechneten Kurven liegen, wobei es Fehler durch die Annahme einer konstanten Zeit während dieser Messungen gibt.

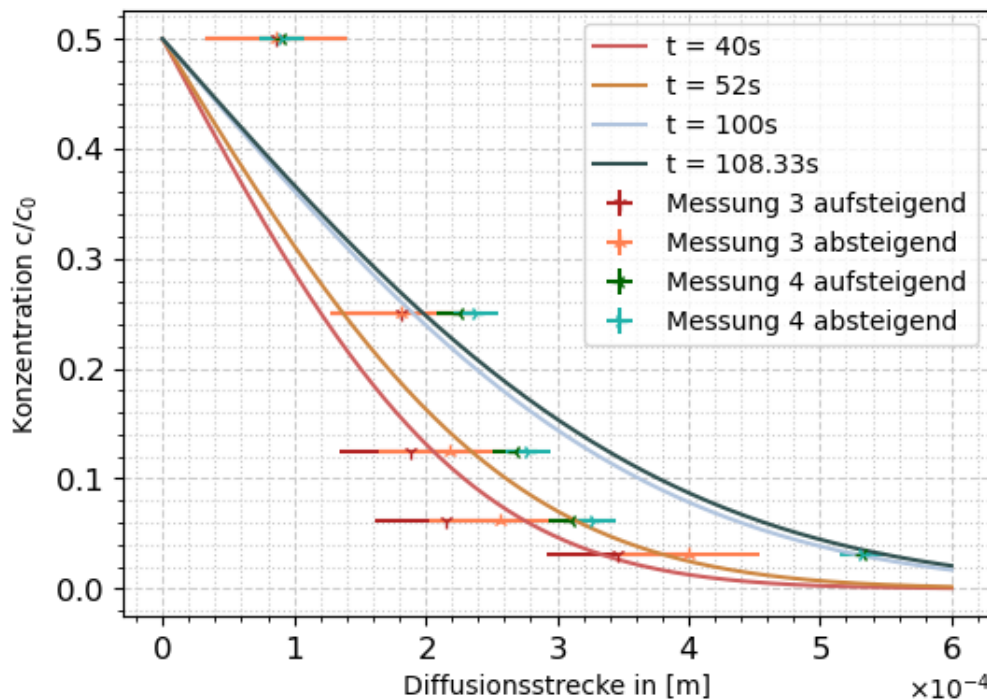


Abbildung 6: Messungen der Konzentrationen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{32}$ für die Küvette aus Messung 1 nach 100 Minuten und Messung 2 nach 40 Minuten, bei als konstant angenommener Zeit, sowie erwartete Konzentrationsverteilung für Anfangs- und Endzeit der Messungen, nach Gleichung 2.7

Der Fehler kann aus Abbildung 6 gelesen werden. Er ergibt sich aus der Differenz der x-Koordinaten der Messwerte für die Diffusionsstrecke. Der maximale Fehler für Messung 3 ist dann $0,54 \cdot 10^{-4}$ m; für Messung 4 $0,17 \cdot 10^{-4}$ m. Gemittelt sind die Fehler $0,256 \cdot 10^{-4}$ m (3) und $0,078 \cdot 10^{-4}$ m (4). Der mittlere Fehler ist für Messung 4 kleiner, weil diese Messreihe rund 60 min später nach Diffusionsbeginn genommen wurde und die Konzentration $\frac{c}{c_0}$ für größere Zeiten gegen 0 konvergiert. Damit sind die Änderung der Konzentration nach der Zeit für Messung 4 nach 100 min kleiner als für Messung 3 nach 40 min.

5 Diskussion

Die eingetragenen Fehler in Abbildung 5 sind sehr klein, somit liegt die Gerade nicht immer im Fehlerbalken der Punkte, der Gesamtfehler der Steigung ist auch etwas zu klein, woraus folgt, dass der Wert für D berechnet aus D_{16} in einem $23\text{-}\sigma$ -Intervall, der von D_{32} in einem $25\text{-}\sigma$ -Intervall liegt. Die Berechnungen sind also beide etwas ungenau, aber einem Wert der Größenordnung 10^{-10} ist bei einem Experiment unter normalen Bedingungen solch ein Fehler nicht ungewöhnlich groß. Die Fehler der Diffusionsstrecke und der Zeit hätten also durchaus großzügiger eingeschätzt werden können, wobei vor allem der Fehler der Diffusionsstrecke durch den quadratischen Teil und die sehr kleine Skala sich stärker auswirkt, und somit deutlich größer hätte gewählt werden müssen.

In Abbildung 6 fallen teils deutliche Unterschiede von den gemessenen Daten zu der theoretischen Kurve auf. Dies liegt natürlich zum Teil an der Annahme, dass die Zeit bei diesen Messreihen konstant wäre. Ein anderer nicht zu vernachlässigender Einfluss war die Notwendigkeit die Küvetten zwischenzeitlich aus der Halterung zu entfernen, in welcher diese fest gesteckt waren. Dabei kam es zu Erschütterungen und Druck auf die Seiten der Küvette. Auch gab es keine Möglichkeit die Küvetten außerhalb der Halterung komplett aufrecht zu lagern, sodass diese leicht schräg lagen. Zusätzlich musste oft der Widerstand in der Messbrücke gewechselt werden, was auch zu Ungenauigkeiten führen kann, indem der Küvettenhalter nicht genau vor dem Lichtspalt zentriert war.

All dies hat einen Einfluss auf die Konzentrationsverteilung, sodass es absehbar war, dass die berechneten Kurven nicht mit den Messpunkten übereinstimmen.

6 Anhang

6.1 Fehlerformeln

Formeln für die Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.1)$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (6.2)$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (6.3)$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten im Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \quad (6.4)$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f , die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C , D , E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{(\sigma_A(\frac{\partial f}{\partial A}))^2 + (\sigma_B(\frac{\partial f}{\partial B}))^2} \quad (6.5)$$

Lineare Regression; die Steigung m und der Achsenabschnitt b den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.6)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.7)$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.8)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n - 2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \quad (6.9)$$

Literatur

- [1] AbiBlick. AbiBlick / Fächer / Biologie / Zytologie / Osmose, 2023. <https://www.abiblick.de/osmose>, last access: 2023-01-28.
- [2] Semendjajew K.A. Bronstein, I.N. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 4. edition, 1999.
- [3] T. Dorfmueller. *Lehrbuch der Experimentalphysik / Bergmann ; Schäfer. Bd. 1 Mechanik, Relativität, Wärme*. Walter de Gruyter, 11. edition, 1998.

Abbildungsverzeichnis

1	schematische Darstellung einer beliebigen Zelle ohne Vakuole, die nur in pflanzlichen Zellen vorkommt, unter osmotischen Drücken; Grafik aus [1]	3
2	Skizze zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung für c aus [3, 1241], die wiederum für die Zweite FICKSche Diffusionsgleichung benötigt wird; betrachte $z = x$ isomorph	6
3	Versuchsaufbau	7
4	Diffusionskurven nach Gleichung 2.7 für verschiedene Zeiten t ; dabei wurde angenommen, dass $D = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ ist	9
5	Quadrat der Diffusionsstrecke x^2 aufgetragen gegen die Zeit t , für Messreihe 1 mit dem Filter $c_0/16$ (blau) und Messreihe 2 mit dem Filter $c_0/32$ (orange); lineare Regression durch die Messwerte	10
6	Messungen der Konzentrationen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{32}$ für die Küvette aus Messung 1 nach 100 Minuten und Messung 2 nach 40 Minuten, bei als konstant angenommener Zeit, sowie erwartete Konzentrationsverteilung für Anfangs- und Endzeit der Messungen, nach Gleichung 2.7	12