Anfängerpraktikum der Fakultät für Physik,
Universität Göttingen

Versuch 11
Coulombsches Gesetz

Praktikant/in:

E-Mail:

Betreuer/in:
Datum der Durchführung: 25.05.23

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Coulombsche Gesetz ist die Grundlage der Elektrostatik und umfasst wichtige Konzepte wie das Verhalten von Ladungen. Es beruht darauf, dass alle geladenen Körper elektrische Kräfte aufeinander ausüben. Mit dem Coulombgesetz kann das Verhalten von Punktladungen oder kugelsymmetrisch angeordneten Ladungen beschrieben werden, wobei die Kräfte der einzelnen Körper durch Superposition überlagert werden. Die dabei wirkenden Kräfte setzen im Ladungsschwerpunkt an und verlaufen auf einer Verbindungsgeraden zum Ladungsschwerpunkt des anderen Körpers. Bei gleichen Ladungen zeigen die Kräfte diametral von einander weg, bei unterschiedlichen Ladungen aufeinander zu, sodass sich unterschiedliche Ladungen anziehen und gleiche abstoßen. Durch das dritte Newtonsche Axiom sind die Beträge der entstehenden Kräfte gleich.
In diesem Versuch wird das elektrische Feld einer geladenen Metallkugel vor einer Metallplatte betrachtet, welches auch durch das Coulombgesetz berechnet wird, wie im Folgenden betrachtet wird.

2 Theorie

2.1 Elektrisches Feld einer Vollkugel

In dem Versuch werden geladene Kugeln betrachtet. Daher soll für diese das elektrische Feld berechnet werden.
Der elektrische Fluss Φ durch eine Fläche A in einem elektrischen Feld E ist nach [4, S. 318] durch

$$\Phi = AE \tag{2.1}$$

gegeben. Weiter ist nach [4, S. 318]

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{2.2}$$

Da der Versuch nicht in einer Vakuumumgebung durchgeführt wird, befindet sich ein Medium, hier Luft, zwischen der betrachteten geladenen Kugel und dem Messgerät. Dieses Medium kann ein Dielektrikum sein, das die Eigenschaft hat, auf molekularer Ebene aus Dipolen zu bestehen. Dieses Medium wird durch das elektrische Feld polarisiert, also die Dipole richten sich am elektrischen Feld aus, wodurch ein Feld erzeugt wird, das dem polarisierenden Feld entgegensteht und dieses am Ort des Dielektrikums abschwächt. Daher wird sonst $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$ mit der stoffabhängigen Dielektrizitätskonstante ϵ_r geschrieben. Da für Luft aber $\epsilon_r = 1$ ist, gilt $\epsilon := \epsilon_0$.

Gleichsetzen führt auf

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = A \cdot E(r), \tag{2.3}$$

wenn das elektrische Feld radialsymmetrisch ist. Für A nutzen wir jetzt die Fläche einer Kugel, durch die der elektrische Fluss fließt. Mit $A = 4\pi r^2$ eingesetzt folgt dann

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{2.4}$$

Nutzen wir dann die bekannte $Q = C \cdot U$, wobei die Kapazität einer Kugel nach [1, S. 21]

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \tag{2.5}$$

ist, sodass das elektrische Feld $E(r)$ von der bekannten angelegten Spannung, mit der die Kugel aufgeladen wird, abhängt, folgt

$$E(r) = \frac{C \cdot U}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\cancel{4\pi\epsilon_0} R \cdot U}{\cancel{4\pi\epsilon_0} r^2} = \underline{\underline{\frac{R}{r^2} U}}. \tag{2.6}$$

2.2 Methode der Spiegelladung

Die Methode der Spiegelladung beruht auf der Idee, das elektrische Feld einer geladenen Kugel oder einer Punktladung, die sich in einem Abstand d, s. Abbildung 1, zu einer leitenden Platte befindet, durch eine zweite fiktive Kugel-/Punktladung im Abstand $-d$ zur Platte auszudrücken. Auf der Seite der tatsächlichen Ladung zur Platte ist das el. Feld dann äquivalent, wie man an der Abbildung 1 nachvollziehen kann.

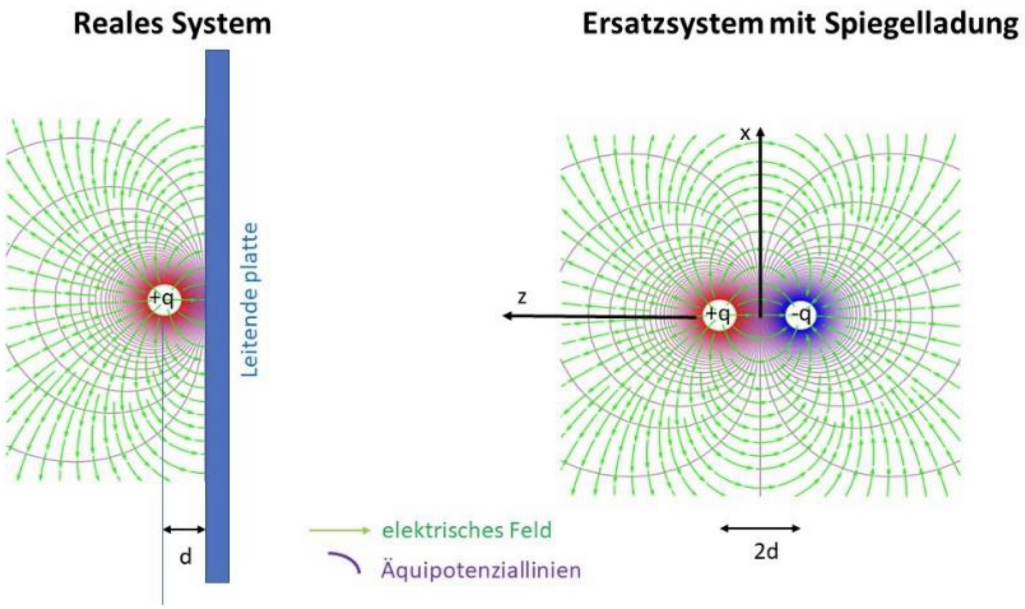

Abbildung 1: links: Feld aus geladener Platte und Punktladung; rechts: Vereinfachung durch Spiegelladung; aus [3]

Die Coulombkraft einer Kugel-/Punktladung ist durch [5, S. 262] mit

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,Q}{r^2}\hat{r} \tag{2.7}$$

gegeben. Dabei ist q die Probeladung und Q die felderzeugende Ladung. Über den bekannten Zusammenhang $\vec{F} = q \cdot \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ erhält man dann das elektrische Feld einer Kugel-/Punktladung

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}. \tag{2.8}$$

Durch das Prinzip der Superposition kann man nun die elektrischen Felder beider Punktladungen im Abstand d und $-d$ zur Spiegelebene der geladenen Platte addieren, wobei r der Abstand zwischen beiden Ladungsschwerpunkten mit $\hat{r}$ als Einheitsvektor ist. Das ergibt

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Q}{r^2}\,(-\hat{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}. \tag{2.9}$$

Mit Gleichung 2.5 für die Ladung Q folgt eingesetzt

$$\vec{E} = \frac{1}{2\cancel{\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{4\cancel{\pi\epsilon_0}R \cdot U}{r^2}\,\hat{r} = \frac{2RU}{r^2}\,\hat{r}. \tag{2.10}$$

Betragsmaßig ist dann

$$\underline{\underline{E(r) = \frac{2R}{r^2}\,U.}} \tag{2.11}$$

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Für das Experiment muss zunächst das in einer Metallplatte angebrachte Elektrofeldmeter angeschlossen werden. Dabei werden die Anschlüsse ± 10 V des Elektrofeldmeters mit dem Spannungsmessgerät verbunden und die Anschlüsse 14 ... 18 V mit Spannungsversorgung. Diese wird auf maximale Ausgangsspannung eingestellt mit einer Strombegrenzung von 0,5 A. Nun wird die zu vermessende Kugel auf dem Sockel beim Maßstab angebracht (wie in Abbildung 2 dargestellt), außerdem wird eine weitere Kugel zum Be- und Entladen der zu vermessenden Kugel auf einem zweiten isolierenden Sockel angebracht und an das Hochspannungsnetzteil angeschlossen. Dabei ist zu beachten, dass der Anschluss über einen Schutzwiderstand verfügen muss. Ein weiteres Kabel wird an der Erde des Netzteils angeschlossen, zum sicheren Entladen der Kugeln.

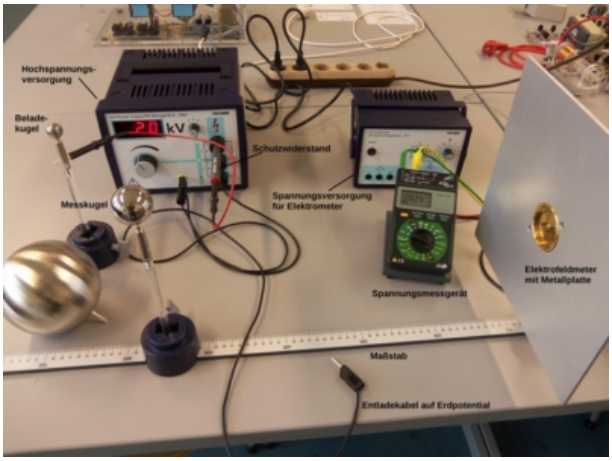

Abbildung 2: Versuchsaufbau mit allen drei zu verwendenden Kuglen (Durchmesser 2, 4 und 12 cm), [2]

3.2 Experiment

Zu Beginn wird das Elektrische Feld der Kugel mit 4 cm Durchmesser vermessen. Dafür wird sie in einem Abstand von 50 cm zum Elektrofeldmeter angebracht. Nun wird die Feldstärke für Beladungsspannungen von 2, 4, 6, 8 und 10 kV gemessen, wobei die Kugel nach jeder Messung entladen wird. Außerdem muss vor jeder Messung der geladenen Kugel eine weitere Messung im entladenen Zustand gemacht werden, zum Nullabgleich der Messungen.
Diese Messungen werden nun wiederholt, mit einer Verringerung des Abstandes der Kugel zum Elektrofeldmeter auf 20cm in neun Schritten. Die Schrittweite wurde dabei so gewählt, wie nach Gleichung 2.6 zu erwarten ist, mit Messungen im Abstand von 40, 34, 30, 27, 25, 23, 22, 21 und 20 cm.
Als letztes werden alle drei Kugeln nacheinander in einem Abstand von 25 cm zum Elektrofeldmeter bei einer Beladungsspannung von 1, 2, 3, 4 und 5 kV vermessen. Es ist dabei wieder ein Nullabgleich bei jeder Messung zu machen.

4 Auswertung

4.1 Elektrisches Feld in Abhängigkeit von Ladung und Entfernung

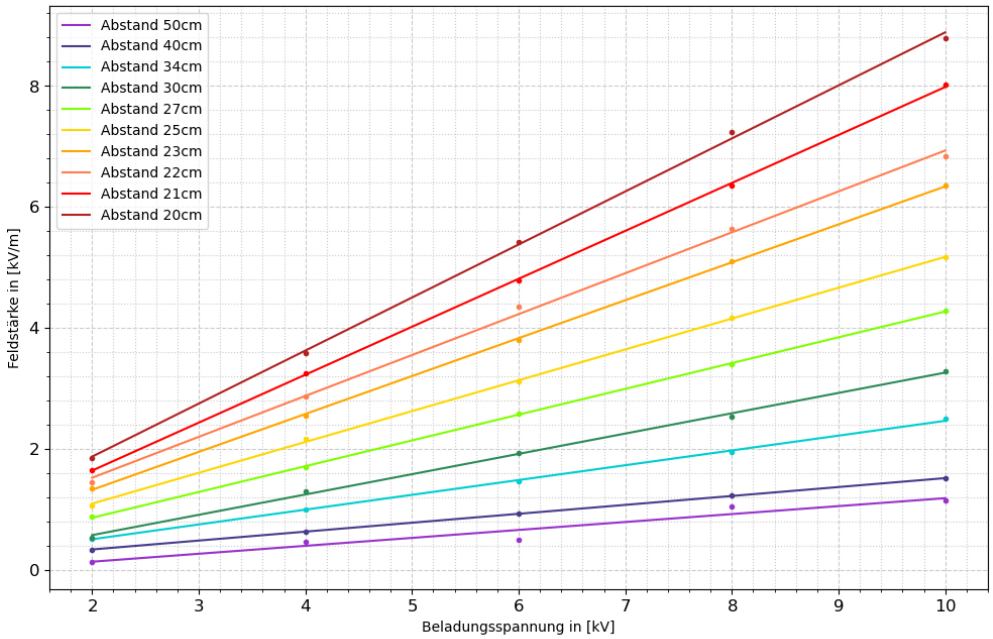

Abbildung 3: gemessene Feldstärke in kV/m gegen die benutzte Beladungsspannung in kV aufgetragen, für verschiedene Abstände r vom Messgerät, mit linearer Regression durch Python

In Abbildung 3 sind für die Kugel mit Durchmesser 4 cm für jeden Abstand die mit dem Elektofeldmeter gemessene Feldstärke gegen die Beladungsspannung aufgetragen. Dabei wurde für die Messwerte ein systematischer Fehler nach
$\sigma_{syst} = \pm(0,25\,\%$ vom maximalen Messwert+kleinster Skalenwert) berechnet. Zusätzlich haben wir einen systematischen Fehler von $\pm 100\,\mathrm{mV}$ angenommen.
Für jeweils einen Abstand wurde dann durch lineare Regression von Python die Steigung, also $\frac{E(r)}{U}$, bestimmt. Diese Werte sind mit dem auch durch Python bestimmten Fehler in Tabelle 1 aufgelistet.

Abstand der Kugel in cm	Steigung in $\frac{1}{\mathrm{m}}$	zugehöriger Fehler in $\frac{1}{\mathrm{m}}$
50	0,132	± 0,021
40	0,1475	± 0,0015
34	0,245	± 0,005
30	0,336	± 0,008
27	0,427	± 0,004
25	0,510	± 0,006
23	0,627	± 0,005
22	0,676	± 0,018
21	0,793	± 0,007
20	0,877	± 0,014

Tabelle 1: Steigungen der linearen Regression aus Abbildung 3 mit zugehörigem Fehler, durch Python berechnet

Die Steigung ist nach Gleichung 2.6 also $\frac{E(r)}{U} = \frac{R}{r^2}$. Diese wird nun logarithmisch gegen den logarithmischen Abstand der Kugel zum Elektrofeldmeter aufgetragen, was in Abbildung 4 dargestellt ist. Der Fehler wurde dabei nach Gleichung 6.5 berechnet mit

$$\sigma_{yi} = \sqrt{\sigma_{m_i}^2 \cdot \left(\frac{1}{m_i}\right)^2} \tag{4.1}$$

wobei y_i den i-ten Punkt bezeichnet und m_i die Steigung der i-ten Geraden aus Abbildung 3.

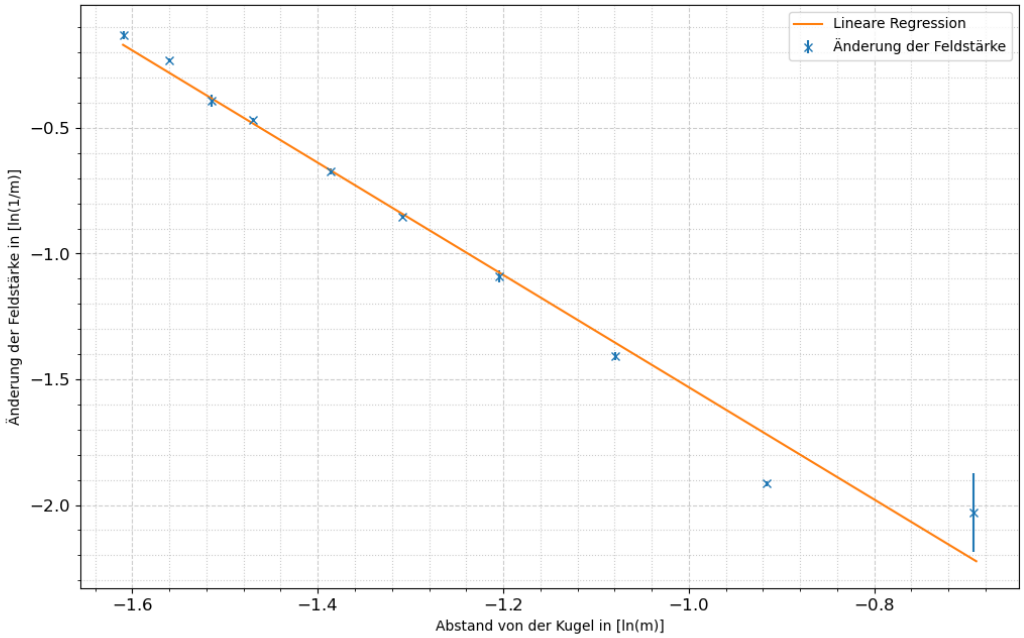

Abbildung 4: Die in Tabelle 1 gelisteten Werte sind logarithmisch gegen den entsprechenden logarithmischen Abstand der Kugel zum Elektrofeldmeter aufgetragen, wieder mit linearer Regression durch Python

Die Geraden-Gleichung dieser neuen Geraden ist demnach $\ln \frac{E}{U} = \ln R + v \ln r$.
Dabei ist v die Steigung, diese wurde durch Python berechnet und ist $v = -2,23 \pm 0,12$, zu sehen in Abbildung 4. Außerdem gilt nach obiger Gleichung auch, dass $\ln R$ der Y-Achsenabschnitt der Geraden aus Abbildung 4 ist, hierfür liefert Python den Wert $\ln 2R = -3,76 \pm 0,15$. Die Fehlerberechnung ist hierbei wieder durch Python erfolgt.

4.2 Feldstärke von verschieden großen Kugeln vor einer Metallplatte durch Methode der Spiegelladung

Bei diesem Versuchsteil soll der Faktor der Proportionalität $E \propto \frac{RU}{r^2}$ aus Gleichung 2.11 bestimmt werden.
Von der gemessenen Spannung, die das Elektrofeldmeter ausgibt, wird der Nullabgleich abgezogen. Die Fehlerformel für Gleichstrom DC einer Spannung U ist:

$$\sigma_{U,\mathrm{DC}} = \pm(0,0025 \cdot \text{größter Wert} + \text{kleinste Skalenbreite}). \tag{4.2}$$

Für das Elektrofeldmeter schätzen wir $\sigma = 0,1\,\mathrm{V}$. Mit Gleichung 6.4 kann man dann die Fehler

$$\sigma_{U_{\text{gem.}}} = \sqrt{(0,0025 \cdot \text{größter Wert} + \text{kleinste Skalenbreite})^2 + (0,1\,\mathrm{V})^2} \tag{4.3}$$

$$\sigma_{U_{\text{Nullab.}}} = \sqrt{(0,0025 \cdot \text{größter Wert} + \text{kleinste Skalenbreite})^(2) + (0,1\,\mathrm{V})^2} \tag{4.4}$$

berechnen. Nach Gleichung 6.5 können wir die Fehler mit

$$\sigma_{U_{\text{ges}}} = \sqrt{\sigma^2_{U_{\text{gem.}}} + \sigma^2_{U_{\text{Nullab.}}}} \tag{4.5}$$

zu einem Gesamtfehler für die Spannung, aus der das elektrische Feld E berechnet wird, gebracht werden. Da 10 V auf dem Spannunsmessgerät 10 kV des elektrischen Feldes entsprechen, wird mit

$$E = 1000 \cdot U_{\text{ges}} \tag{4.6}$$

das elektrische Feld ausgerechnet. Für den Fehler ergibt sich analog $\sigma_E = 1000 \cdot \sigma_{U_{\text{ges}}}$.

Trägt man die elektrische Feldstärke gegen die Beladungsspannung auf, erhält man den Plot in Abbildung 5.

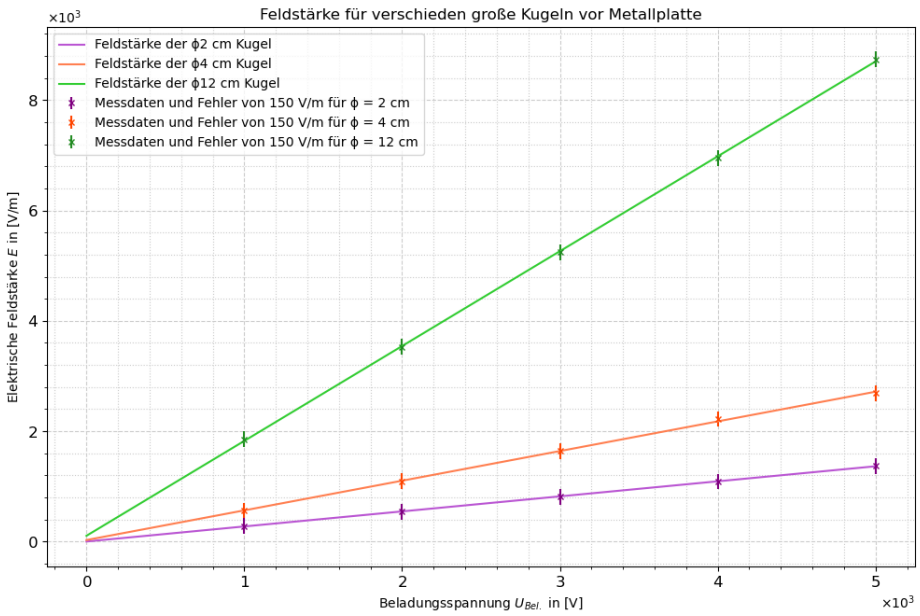

Abbildung 5: Feldstärke durch Spannung $U_{\text{ges.}}$ berechnet, aufgetragen gegen die Beladungsspannung $U_{\text{bel.}}$; gerundet im Sinne der signifikanten Stellen sieht es so aus, als wäre der Fehler für jede Messreihe gleich groß, obwohl dieser eigentlich mit größerem Kugelradius steigt; der Fehler der Beladungsspanne ist halbe Skalenbreite, also $0,5\,\text{V}$, ist aber durch die Skalierung der Achsen nicht darstellbar

In nachfolgender Tabelle 2 sind die Fitparameter dargestellt.

Kugelradius R in cm	Steigung m_1 in m^{-1}
1	$(0,27 \pm 0,05)$
2	$(0,54 \pm 0,05)$
6	$(1,72 \pm 0,05)$

Tabelle 2: Fitwerte durch scipy.optimize von elektrischer Feldstärke in Abh. von der Beladungsspannung U_{Bel}; $E(U_{\text{bel.}}) = m_1\, U_{\text{bel.}} + b_1$

m_1 ist die gesammelte Bezeichnung für die Geradensteigungen der drei Funktionen im ersten Fit. Da der Achsenabschnitt nicht weiter benötigt wird, wird er hier nicht angegeben.

$$m_1 = \frac{\Delta E}{\Delta U_{\text{bel.}}} = \frac{x\cancel{\Delta U_{\text{bel.}}}R}{\cancel{\Delta U_{\text{bel.}}} \cdot r^2} = \frac{xR}{r^2}. \tag{4.7}$$

Trägt man nun $m_1 \cdot r^2$ gegen R auf, folgt für diesen linearen Zusammenhang der Form $m(R) \cdot r^2 = m_2 \cdot R + b_2$

$$m_2 = \frac{\frac{x\Delta R}{r^2} \cdot r^2}{\Delta R} = \frac{x\cancel{\Delta R}}{\cancel{r^2}\cancel{\Delta R}} \cdot \cancel{r^2} = x; \tag{4.8}$$

dabei ist x der gesuchte Proportionalitätsfaktor.
Der Fehler für Größe $m\,r^2$ leitet sich ab von Gleichung 6.5 zu

$$\sigma_{m\,r^2} = \sqrt{\sigma_m^2 \cdot r^4 + \sigma_r^2 \cdot 4\,m^2\,r^2}. \tag{4.9}$$

Dabei ist r der Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Metallplatte, der in dieser Durchführung 0,25 m beträgt. Sein Fehler ist mit 2 mm geschätzt, da das Lineal, mit dem der Abstand zur Platte gemessen wurde, auf dem Tisch umherrutschen konnte. Die Kugelradii werden als exakt vorausgesetzt.

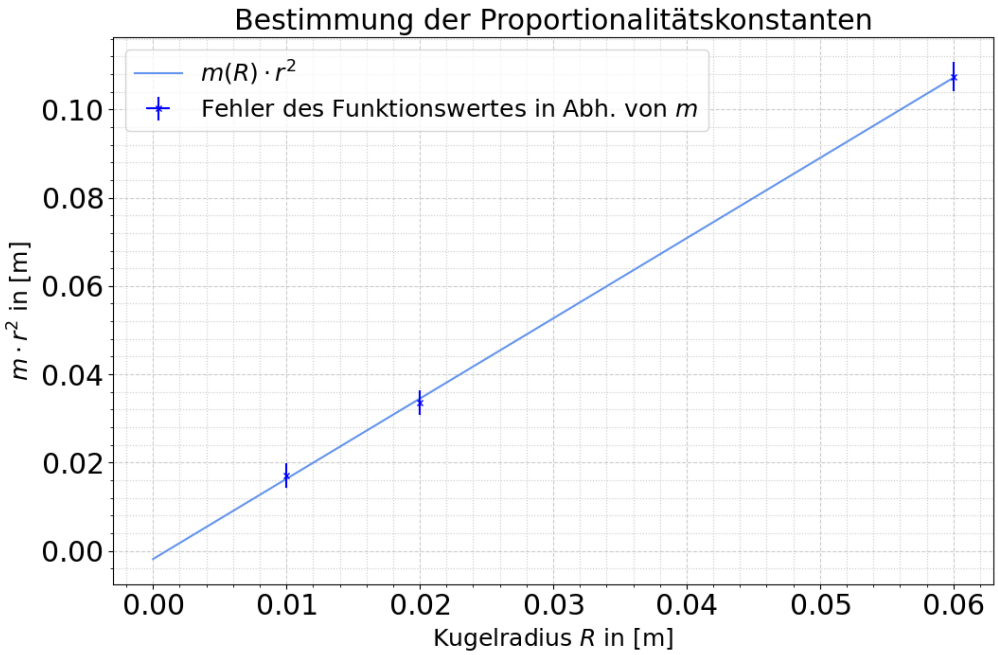

Abbildung 6: Die Steigungen der Geraden aus Abbildung 5 sind augenscheinlich abhängig von dem Kugelradius der Kugel, für den die Messreihe aufgenommen wurde. Die Steigung der linearen Funktion ist die dimensionslose Proportionalitätskonstante; der Fitparameter b_2 ist nicht von Bedeutung

Für den Proportionalitätsfaktor ergibt sich

$$\underline{\underline{x = (1,82 \pm 0,09)}} \ .$$

Durch Gleichung 2.11 erwarten wir, dass die Proportionalitätskonstante 2 ist.

5 Diskussion

5.1 Vergleich der Werte und Fehler

Im ersten Teil der Auswertung wurde der Wert $-2,23 \pm 0,12$ für die Steigung v berechnet. Nach Gleichung 2.6 ist zu erwarten, dass dieser dem Exponenten der Abstandsabhängigkeit von $E(r)$ entspricht. Der berechnete Wert liegt in einem 2-σ-Intervall des erwarteten Werts von -2.
Weiter wurde der Y-Achsenabschnitt bestimmt, welcher $\ln 2R$ entsprechen sollte. Der errechnete Wert leigt mit $-3,76 \pm 0,15$ in einem 4-σ-Intervall des erwarteten Werts von $\ln 2R = \ln 0,04 = -3,22$.
Für den zweiten Auswertungsteil sollte hingegen ein Faktor und kein Exponent bestimmmt werden. Wie erwähnt sollte dieser gleich 2 sein. Damit liegt der experimentell bestimmte Wert von $1,82 \pm 0,09$ in einem 2-σ-Intervall.

5.2 Fehlerquellen der Versuchsdurchführung

Die erste Schwierigkeit bei Versuch war eine Schwankung des vom Elektrofeldmeter angezeigten Werts. Der Fehler durch diese Schwankung wurde auf $\pm 100\,\mathrm{mV}$ geschätzt. Anhand der σ-Intervalle erkennt man, das sich dieser Fehler wie erwartet verhalten hat. Zusätzlich ist eine Beeinträchtigung der Messungen durch die anderen Gruppen im Raum anzunehmen. Dies wurde besonders deutlich, als das Elektrofeldmeter eine Änderung von über $100\,\mathrm{mV}$ anzeigte, durch herantreten eines anderen Studierenden an den Versuchsaufbau. Die hierdurch verursachten Fehler sollten durch den Nullabgleich der gemessenen Werte minimiert werden. Dies scheint eine gute Methode zu sein, da sich auch gegen Ende des Versuches, als der Raum fast leer war, die σ-Intervalle nicht nennenswert verändert haben.
Das 4-σ-Intervall vom Y-Achsenabschnitt lässt sich durch diese Fehlerquellen erklären. Auch der Fehler für die Proportionalitätskonstante ist mit dem Nullabgleich und dadurch der Beseitigung der Schwankungen des Elektrofeldmeters und anderer Störfaktoren begründbar.

6 Anhang

6.1 Fehlerformeln

Formeln für die Fehlerrechnung und lineare Regression:

Mittelwert (Bestwert, für den die quadratischen Abweichungen minimal werden); wird verwendet, um verschiedene Werte für **dieselbe** gemessene Größe zu mitteln:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6.1}$$

Gewichteter Mittelwert; wird verwendet, um durch Mitteln der Ergebnisse mehrerer Messvorgänge, abhängig von unterschiedlichen Variablen, eine Größe zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{6.2}$$

Fehler des gewichteten Mittelwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{6.3}$$

Gesamtfehler: der Gesamtfehler ist eine Möglichkeit, den statistischen und systematischen Fehler in der Formel zu verbinden und auf einen Fehler zu berechnen; der systematische Fehler ist ein Fehler, der sich beispielsweise durch eine falsche Messkalibrierung durch einen gesamten Versuch, auch bei Wiederholung desselben Experimentes, durchzieht. Der statistische Fehler ist ein zufälliger Fehler, der durch ungenaues Ablesen oder Zufälligkeiten um Versuchsaufbau entsteht:

$$\sigma_{ges} = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} \tag{6.4}$$

Fehlerfortpflanzung; die zu berechnende Größe f, die von den zu bestimmenden Größen A und B abhängt, kann um weitere Variablen C, D, E usw. ergänzt werden, wenn sich die Formel so gestaltet; die Fehler für weitere Variablen werden nach derselben Logik unter der Wurzel hinzugefügt; wurde sie verwendet, wurden die jeweiligen Größen und Ableitungen in die Formel eingesetzt:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\sigma_A \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)\right)^2 + \left(\sigma_B \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)\right)^2} \tag{6.5}$$

Lineare Regression; die Steigung m und der Achsenabschnitt b den linearen Fits werden - wenn benutzt - durch ein Skript in Python berechnet:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{6.6}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{6.7}$$

Fehler für die Fitwerte der linearen Regression:

$$\sigma_m^2 = \frac{n \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \tag{6.8}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - b - m x_i)^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \tag{6.9}$$

Literatur

[1] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik*. Springer Spektrum, 6. edition, 2013.

[2] Lehrportal Uni Göttingen. Praktikum zu Experimentalphysik II: 11 - Coulombsches Gesetz, 2020. `https://lp.uni-goettingen.de/get/text/7979`, last access: 21.05.23.

[3] H. Hofsäss. Elektrostatik Vorlesung 4. Vorlesungsskript, 2023. abgeändert aus Ënderlein, J. Physik II: Elektrizitätslehre. S. 94, (2018).
.

[4] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Spektrum, 25. edition, 2015.

[5] Gerhard Steiner Paul Wagner, Georg Reischl. *Einführung in die Physik*. Facultas Verlags- und Buchhandel AG, 4. edition, 2020.

Abbildungsverzeichnis